

# Una galassia di numeri

Lavoro di maturità in fisica (astronomia)



*Interazione tra la galassia UGC 1810 e UGC 1813*

*Credito: NASA, ESA, and the Hubble Heritage Team (STScI/AURA)*

Autori: Amos Pirotta e Stefano Pontarolo

Docente: Nicolas Cretton

Anno scolastico: 2011-2012

# Indice

## 1. Introduzione

- 1.1. Le nostre motivazioni/aspettative
- 1.2. Contenuti

## 2. L'universo

- 2.1. La varietà di galassie presenti nell'universo
- 2.2. La classificazione di Hubble
- 2.3. Le galassie a spirale
- 2.4. Le galassie ellittiche
- 2.5. Le galassie irregolari e le galassie nane
- 2.6. La fusione di galassie
- 2.7. La dinamica dell'universo: le equazioni di Friedmann
- 2.8. Ammassi di galassie
- 2.9. La materia oscura

## 3. Il problema N-body

- 3.1. N-body: gli utilizzi e lo scopo
- 3.2. Storia del problema N-body

## 4. Il metodo di K. Kuijken e J. Dubinski

- 4.1. La funzione di distribuzione (DF)
- 4.2. La funzione di distribuzione del centro
- 4.3. La funzione di distribuzione dell'alone

- 4.4. La funzione di distribuzione del disco
- 4.5. Un modello campione

## 5. I primi esperimenti numerici

- 5.1. Scontri tra galassie
- 5.2. Le galassie delle Antenne
- 5.3. La storia delle galassie delle Antenne

## 6. Tecniche e metodi per le simulazioni numeriche

- 6.1. Metodi PP e Metodi basati su reticolo (mesh)
- 6.2. Metodo gerarchico o ad albero
- 6.3. Algoritmo di Barnes-Hut
- 6.4. Fast multiple method (fmm)
  - 6.4.1 Il potenziale
  - 6.4.2 Espansione di multiplo del potenziale
  - 6.4.3 Espansioni interne e conversioni tra espansioni
  - 6.4.4 Algoritmo Fast Multiple method
- 6.5 Step temporali e metodo del leapfrog

## 7. Conclusione

## 8. Bibliografia

# 1. Introduzione

## 1.1 Le nostre motivazioni/aspettative:

Questo progetto è partito con l'intento di leggere un articolo di Kuijken e Dubinski che parlava di come creare delle galassie analiticamente. In seguito prendere un programma di simulazioni di galassie, già esistente, di nome NEMO, nel quale c'è una funzione che crea ammassi stellari partendo dai dati delle galassie analitiche progettate da Kuijken e Dubinski. Dopo averlo installato, abbiamo cercato di capirne il funzionamento, come fare ad inserire i dati per poi utilizzarlo per avere dei grafici e delle immagini da commentare. Purtroppo a causa di problemi pratici dovuti alla difficoltà nell'installazione, ai testi in lingua straniera, non siamo riusciti ad utilizzare la funzione che ci serviva e quindi abbiamo perso la parte "pratica" del nostro progetto. Nonostante questo non ci siamo scoraggiati e abbiamo fatto una ricerca più teorica del problema.

## 1.2 Contenuti:

In questo lavoro parleremo dell'universo per quanto concerne le galassie, (la classificazione, gli ammassi, ecc... ), spiegheremo cos'è un problema N-body e la sua evoluzione nel tempo, gli strumenti per creare una galassia matematicamente, i primi esperimenti di scontri tra galassie, con le rispettive scoperte e infine le tecniche e i metodi che vengono usati dai computer per rappresentare delle galassie sempre più dettagliate (con più corpi) e sempre più realistiche.

# 2. L'universo

## 2.1 La varietà di galassie presenti nell'universo

Le galassie sono grandi insiemi di stelle (tra 10 milioni e 100 miliardi) stabili grazie alle forze gravitazionali che interagiscono tra di esse. Le galassie compongono in gran numero l'universo, distribuendosi in modo non omogeneo e si raggruppano in ammassi di galassie. Esistono diversi tipi di galassie e vengono storicamente suddivise in base alla loro morfologia, cioè visivamente. Le più frequenti sono

quelle ellittiche, con un profilo ad ellisse, poi troviamo quelle a spirale, che possiedono una forma discoidale con dei bracci a spirale che dipartono dal nucleo e, infine, le galassie irregolari, frutto degli effetti di un'iterazione con galassie vicine o addirittura la fusione delle due.

## 2.2 La classificazione di Hubble

La classificazione di Hubble suddivide i vari tipi di galassie in tre grandi famiglie, che a sua volta divide ulteriormente a dipendenza delle peculiarità di tali oggetti. Ad esempio le galassie ellittiche vengono distinte in diverse sottoclassi a seconda del loro grado di appiattimento (da E0 per gli oggetti più circolari fino a E7 per quelli più appiattiti). Le spirali vengono classificate in due sottoclassi maggiori; le spirali normali e quelle barrate. Le ultime citate si distinguono per la presenza di una barra che attraversa la regione del nucleo e che può essere più o meno pronunciata. Le due famiglie delle spirali vengono poi suddivise a loro volta in sottoclassi a seconda dell'importanza del *bulge* (rigonfiamento centrale) e del grado di apertura dei bracci a spirale.

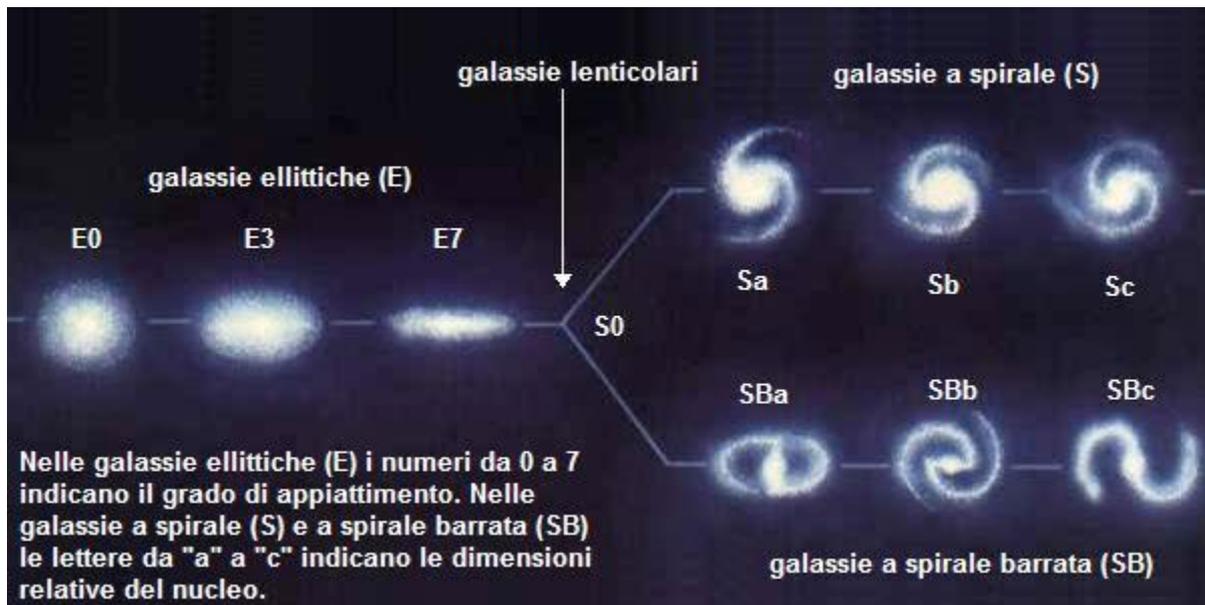


Figura 1: La classificazione di Hubble

Credito: <http://www.astroala.it/didattica/profondocielo/classificazione.htm>

## 2.3 Le galassie a spirale

Le galassie a spirale sono composte da un *nucleo* centrale, caratterizzato da un'elevata densità di stelle, da un *bulge* di forma ellissoidale, che contiene il nucleo,

e infine da un *disco* relativamente sottile, all'interno del quale si sviluppano i bracci a spirale composti principalmente da stelle giovani di colore bianco o blu. Tutte queste componenti sono racchiuse in un alone molto esteso, composto da stelle molto vecchie e da materia oscura, infatti sono le prime stelle che si sono create all'interno della galassia. Le galassie a spirale ruotano lentamente, un ciclo ogni qualche centinaio di milioni di anni, ma non si comportano come oggetti solidi. Le stelle più lontane ci mettono più tempo a completare le orbite di quelle vicino al nucleo. Questa rotazione differenziale spiega in parte l'esistenza dei bracci a spirale.

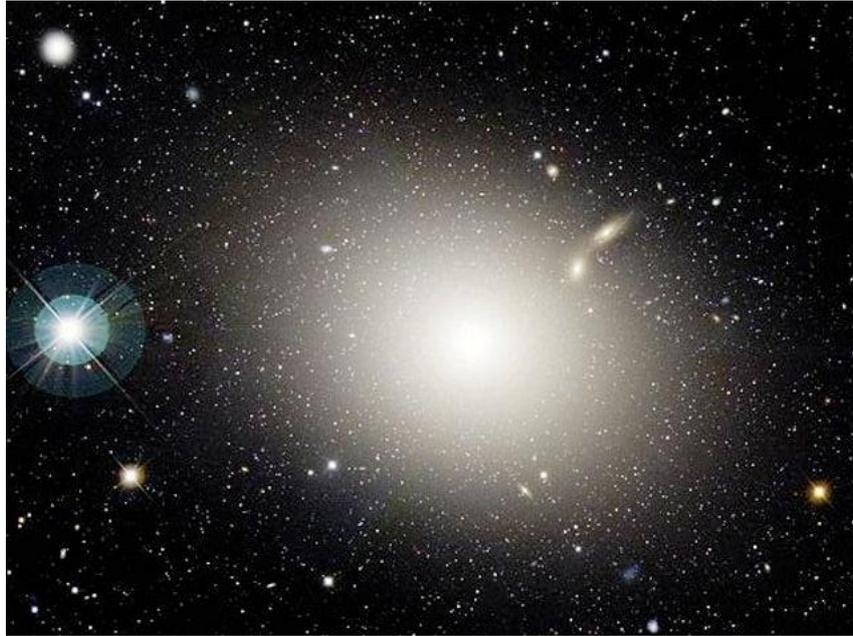


Figura 2: La galassia NGC 1300

*Credito: NASA, ESA, and the Hubble Heritage Team (STScI/AURA)*

## 2.4 Le galassie ellittiche

Le galassie ellittiche hanno una struttura molto semplice, simile a una palla, che può essere più allungata, come un pallone da rugby, o appiattita come un cuscino. Questi oggetti sono composti principalmente da stelle vecchie, quindi di colore rossastro e a differenza di quelle a spirale, contengono pochi gas e polveri. Per questo motivo le ellittiche sono raramente sistemi con una velocità media di rotazione diversa da zero, infatti le stelle che le compongono non ruotano intorno allo stesso asse, come nelle spirali, ma si muovono piuttosto in modo casuale, con velocità molto elevate (300 km/s nelle galassie più massicce).



**Figura 3: Galassia ellittica gigante ESO 325-G004**  
*Credito: NASA, ESA, and the Hubble Heritage Team (STScI/AURA)*

## 2.5 Le galassie irregolari e le galassie nane

Queste ultime sono caratterizzate da una forma non simmetrica, quindi irregolare e non rientrano nelle classi morfologiche precedentemente descritte. Anch'esse vengono però classificate in due tipi: il primo tipo è detto magellanico, perché riconducibili alle nubi di Magellano e anch'esse vengono contraddistinte oltre che per la loro morfologia anche per la bassa luminosità. Le irregolari di secondo tipo, hanno invece una luminosità superficiale elevata e sono solcate da forti bande di polvere.

Nel caso in cui le dimensioni sono molto più piccole di quelle delle galassie normali, questi oggetti vengono classificati come *galassie irregolari nane*. Queste ultime possono avere dimensioni lineari dieci volte minori delle galassie massicce, e mille volte minore può essere il numero di stelle.

La maggior parte delle galassie irregolari sono satelliti di oggetti più grandi, per lo più galassie a spirale. La loro formazione può essere di due tipi: con un'esplosione di materia, o meglio descritta attraverso un'interazione con un'altra galassia, che influenzandola con la propria forza di gravità ha provocato un cambiamento strutturale sia nella prima che nella seconda. Questo tipo di iterazioni sarà quello che ci interesserà di più all'interno del nostro lavoro, in quanto cercheremo di simulare attraverso dei calcoli al computer uno scontro tra due galassie, per quindi ottenere una galassia irregolare simile a quelle appena descritte.



Figura 4: Galassia irregolare NGC 4449  
Credito: NASA, ESA, and the Hubble Heritage Team (STScI/AURA)

## 2.6 La fusione di galassie

Quando si parla di scontri tra galassie non bisogna pensare ad un vero e proprio urto, ma piuttosto ad un'iterazione, in quanto due galassie che si avvicinano e si scontrano in realtà è come se si scontrassero due fantasmi, cioè non si toccano: lo spazio tra le stelle che compongono una galassia è talmente grande che la possibilità che due stelle si scontrino è piccolissima. Ad interagire sono solamente le forze e l'energia gravitazionale scaturita dall'incontro dei due ammassi stellari, che provoca soprattutto cambiamenti di tipo strutturale. Una parte della massa può essere trasferita da una all'altra galassia, a seconda dell'angolo di incidenza e delle velocità delle rispettive due galassie. Gli effetti più devastanti durante questo processo avvengono sulla parte gassosa dell'oggetto, infatti le due nubi che si scontrano provocano la formazione di onde d'urto all'interno delle nubi, che riscaldano e comprimono il gas stesso. Nelle parti più dense questo fatto può dare vita a nuove stelle.

Per quanto riguarda le stelle, esse cambiano la loro distribuzione e la loro dinamica, in quanto le forze gravitazionali delle due galassie che agiscono su di esse possono far sì che le stelle vengano attratte da una galassia all'altra. L'effetto di tali forze, dette *mareali*, è pertanto quello di modificare le orbite e velocità delle singole stelle, che attraverseranno un periodo di instabilità prima di raggiungere un nuovo equilibrio all'interno del nuovo sistema, quindi con un'orbita e una velocità nuova.

L'iterazione dipende molto da diversi fattori: la massa dei due oggetti, la velocità d'iterazione, il tipo di galassia. Infatti se le due galassie hanno masse particolarmente diverse (con una molto maggiore all'altra) avviene una sorta di fagocitazione: la più piccola è destinata ad essere assorbita da quella più grande, questo fatto viene chiamato, *cannibalismo galattico*. Altre volte, invece, l'interazione è talmente rapida che le due galassie si passano attraverso, mutando solo di poco le proprie caratteristiche fisico-chimiche. Talvolta, infine, l'iterazione gravitazionale può ridisegnare la struttura stessa degli oggetti, conferendo loro una forma caratteristica, irregolare.

## 2.7 La dinamica dell'universo: le equazioni di Friedmann

Per comprendere l'origine degli ammassi di galassie, è necessario riferirsi alle teorie cosmologiche dell'origine ed evoluzione dell'Universo. Nello scenario primordiale dell'universo, ogni cosa è stata generata da un Big Bang molto caldo circa 15-20 miliardi di anni fa, quando tutta la materia dell'Universo, la maggior parte in forma di radiazione, fu espulsa ad un'altissima velocità radialmente da un minuscolo volume spaziale. Dal momento che la forza gravitazionale ha rallentato l'espansione, le variazioni locali di densità sono state accentuate dall'attrazione gravitazionale locale, ottenendo come risultato la separazione tra superammassi. Le variazioni locali di densità all'interno di ogni superammasso, hanno portato alla formazione degli ammassi, che, a loro volta, hanno dato origine alle galassie individuali. Se la densità media di massa dell'Universo è inferiore al valore critico, l'attrazione gravitazionale non sarà in grado di fermare l'espansione. L'Universo appena descritto è detto "aperto" e si espanderà per sempre. D'altra parte se la densità media dell'Universo è superiore al valore critico, l'attrazione gravitazionale invertirà il moto d'espansione in un moto di contrazione che procederà fino ad una condizione di altissima densità, dal quale, presumibilmente, il processo ricomincerà con un nuovo Big Bang. Questo tipo di Universo è detto "chiuso".

Le equazioni del moto che descrivono l'espansione dell'Universo, furono scoperte da Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

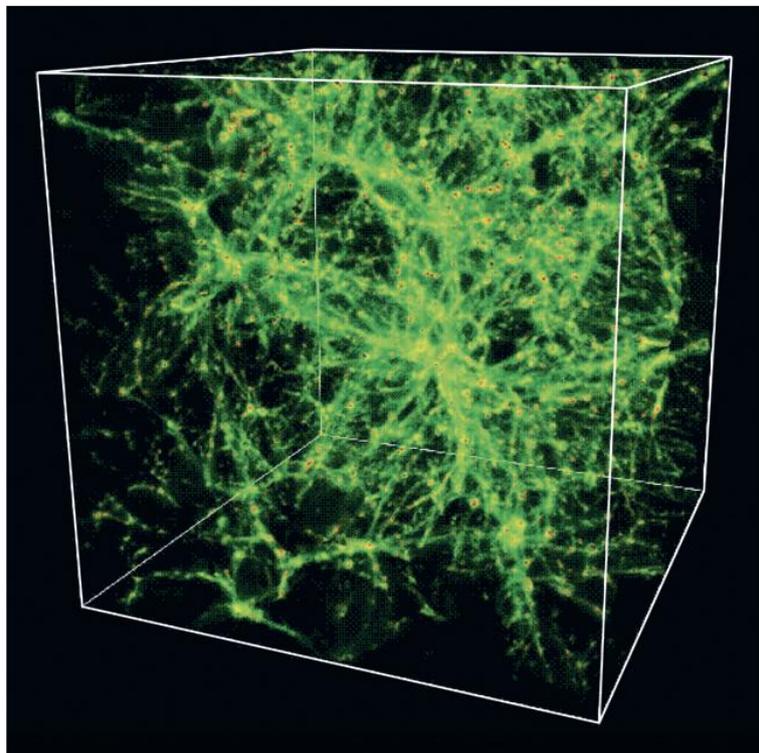
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Dove:

- a = fattore di scala
- $\rho$  = densità media dell'Universo
- p = pressione
- $\Lambda$  = costante cosmologica
- k = parametro di curvatura

## 2.8 Ammassi di galassie

Attraverso gli studi e le osservazioni ci si può aspettare che la distribuzione attuale delle galassie, contenga indizi rilevanti sulla condizione dell'universo in tempi precedenti e sulla natura della futura espansione. In particolare si spera che dettagliati studi sugli ammassi forniscano evidenze su quale sia il modello più corretto per descrivere l'Universo. I progetti di osservazione avviati all'inizio degli anni ottanta hanno rivelato per l'appunto che le galassie non sono distribuite a caso, ma si aggregano a formare strutture che sono visibili come filamenti e ampie zone vuote.



The density distribution of baryons at low redshift  
from the simulation of Cen & Ostriker (2006)

**Figura 5: La densità di distribuzione dei barioni a basso redshift  
Dalla simulazione di Cen & Ostriker (2006)**

Le regioni dove oggi si nota la materia addensarsi, suggeriscono dove si trovavano le zone più dense dell'Universo primordiale, infatti i moti degli ammassi di galassie, le loro velocità rispetto al moto di espansione cosmica, sono in larga misura moti di avvicinamento a grandi concentrazioni di massa.

Gli ammassi sono composti da migliaia di galassie ed hanno forme regolari a dipendenza del tempo passato dalla loro formazione. È quindi possibile ipotizzare che gli ammassi giovani e ancora instabili dinamicamente siano di aspetto molto irregolare, mentre quelli vecchi, grazie all'azione dell'interazione gravitazionale che agisce tra le singole galassie, abbiano raggiunto un più alto grado di

equilibrio. Questi ultimi, in stadio avanzato, tipicamente presentano una galassia gigante nel proprio centro, che è il risultato della fusione o della fagocitazione di altre galassie minori che le orbitavano attorno.

Tra le proprietà che caratterizzano questi ammassi, riveste un interesse notevole la distribuzione di velocità delle galassie all'interno dell'ammasso, misurate attraverso l'effetto Doppler, cioè lo spostamento verso il rosso (redshift) o verso il blu della luce emessa da una sorgente a causa del suo allontanamento e avvicinamento rispetto all'osservatore. Attraverso lo studio della velocità media di un ammasso e della velocità quadratica media, ovvero la media della distribuzione delle velocità attorno al valore medio, si è potuto calcolare le masse; i risultati ottenuti, però, evidenziavano il fatto che la massa "dinamica", calcolata sulla base delle misure di velocità, è circa 10 volte più grande che la massa "luminosa", calcolata sulla base della conversione della luminosità delle galassie in massa. Di conseguenza, la totalità della massa deve stare nello spazio tra le galassie in una forma non osservabile in maniera diretta, la *materia oscura*.

## 2.9 La materia oscura

L'indagine sulla natura, sulla quantità e sulla distribuzione della materia oscura è una sfida fondamentale per la fisica, non soltanto per l'impatto che avrebbe sugli studi della struttura della materia e delle interazioni fondamentali, ma anche per la nostra conoscenza dell'evoluzione dell'universo. Proprio la materia oscura, rappresentando una parte fondamentale della massa del cosmo, che è costituito dal 73% di energia oscura, dal 23% di materia oscura, mentre il restante 3,6% è

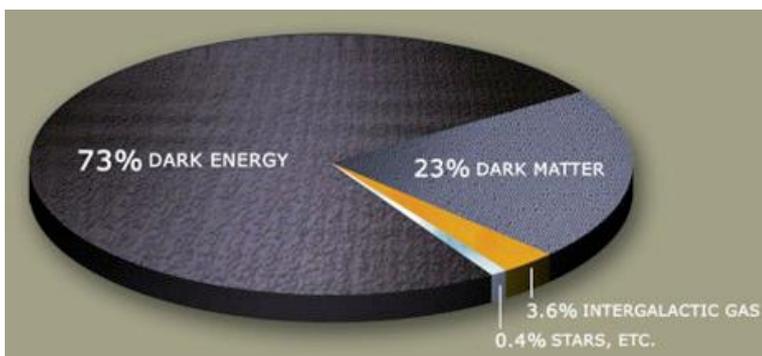


Figura 6: La composizione dell'universo

Credito: [www.realshading.it](http://www.realshading.it), voce: A caccia dell'energia oscura

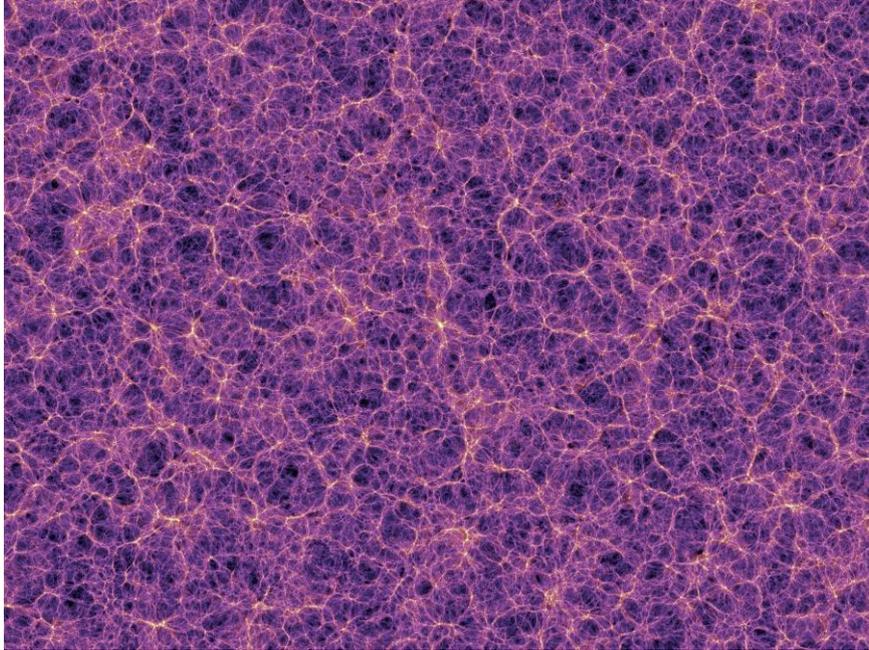
occupato dal gas intergalattico e da stelle, galassie, ecc. (vedi figura 6), che può determinare la geometria dell'universo descritta dai modelli citati in precedenza.

Per quanto riguarda la densità di materia oscura, le osservazioni portano a concludere che la massa degli

ammassi di galassie è molto maggiore della somma delle galassie contenute, le quali, a loro volta, contengono una rilevante quantità di materia oscura, rilevabile attraverso le curve di rotazione. La densità di materia oscura varia tenendo conto delle strutture che vengono trattate, mostrando un andamento crescente per strutture più grandi. La densità di materia oscura tende ad essere diffusa nelle zone di spazio tra le galassie piuttosto che all'interno di queste ultime.

Alcuni studi rivelano che la distribuzione di materia oscura è molto irregolare, si nota infatti una concentrazione importante sui filamenti dove risiedono le galassie,

dove la densità è una decina di volte maggiore di quella media. Gli ammassi di galassie sono situati nelle zone di intersezione, nei nodi, di questa struttura filamentosa, e il rapporto di densità rispetto a quella media in queste regioni è dell'ordine di  $10^2$ .



**Figura 7: Simulazione al computer che mostra su grande scala l'Universo, simile ad una "ragnatela cosmica"**  
Credito: The Millennium Simulation Project

I risultati di tali ricerche sulla distribuzione di materia oscura e sull'abbondanza di ammassi di galassie sono in grado di sostenere delle teorie sulla natura della materia oscura, come ad esempio, la più convincente, che sostiene che la materia oscura è formata da particelle relativamente pesanti e "fredde", la *cold dark matter*.

### 3. Il problema N-body

#### 3.1 N-body: gli utilizzi e lo scopo

Lo studio di sistemi fisici attraverso l'uso di simulazioni numeriche è applicato in uno svariato numero di campi scientifici e assume importanza crescente col passare del tempo, quindi con lo sviluppo di calcolatori e modelli di calcolo. Oltre all'ambiente astrofisico, infatti, è sufficiente citare lo sviluppo di tali metodi nell'ambito della fisica dei plasmi<sup>1</sup>, della fluidodinamica<sup>2</sup> e delle dinamiche molecolari<sup>3</sup>.

Dal momento che il problema coinvolge un numero particolarmente alto e variabile di particelle, ognuna con la propria traiettoria del moto, il termine

comunemente usato è quello di simulazioni N-Body, con lo scopo finale di simulare l'evoluzione di un sistema di N corpi che interagiscono tra loro.

Le simulazioni N-Body sono utilizzate per lo studio di sistemi astrofisici con un intervallo di dimensioni spaziali che varia dai piccoli ammassi di stelle fino alle strutture in larga scala dell'universo. Le strutture cosmologiche, in particolar modo, sono influenzate da processi che si sviluppano su una gamma di scala enorme, in quanto è la stessa forza di gravità che agisce fino a dimensioni comparabili con quella dell'universo stesso. Le applicazioni astrofisiche, inoltre, pongono richieste onerose alle risorse di calcolo, in quanto il numero di corpi interessati può variare dalle  $10^5$  alle  $10^{22}$  unità ( $10^{11}$  stelle in 1 galassia,  $10^{11}$  galassie nell'universo, quindi  $10^{22}$  oggetti, Non si riesce però ancora a superare  $10^{10}$  corpi con i super-computer).

In un sistema, un corpo influenza quelli circostanti attraverso l'interazione gravitazionale espressa attraverso la legge di Newton, ma siccome, per più di tre corpi non è possibile risolvere analiticamente l'equazione del moto, vengono preferiti metodi iterativi allo scopo di giungere ad una soluzione del problema numericamente: ad ogni intervallo di tempo definito, la forza su ogni corpo è calcolata e tale informazione viene usata per aggiornare le posizioni e le velocità degli stessi corpi. Quindi, dato che manipolare matematicamente le forze di ogni corpo richiede un lavoro da parte del calcolatore pari al quadrato degli elementi presenti nella simulazione, si sono sviluppati nuovi approcci per ridurre il numero di calcoli. Per questo motivo l'importanza di abbassare il tempo di lavoro di un computer è stato lo stimolo per la nascita di nuove tecniche di calcolo che potessero far fronte a questo problema, senza però gravare eccessivamente all'esattezza dei risultati ottenuti. Allo stesso tempo, metodi più efficienti (in tempo di calcolo) permettono di aumentare il numero di particelle.

Recentemente sono stati introdotti nuovi metodi di simulazione la cui caratteristica principale è rappresentata dal tipo di organizzazione che viene usata per condurre la simulazione. Questi metodi vengono infatti chiamati metodi gerarchici (hierarchical methods) o ad albero (tree methods). Tra i più efficienti che sfruttano questa organizzazione gerarchica, spiccano quello di Barnes-Hut (1986) e di Greengard (1987), che, attraverso processi molto diversi tra loro, riescono a raggiungere una precisione di calcolo notevole, riducendo il tempo di calcolo (rispetto ad uno schema semplice in  $N^2$ ). Da non dimenticare è anche l'importanza dello sviluppo tecnologico che mette a disposizione calcolatori, che hanno il compito di far "girare" la simulazione, sempre più performanti, ultimamente basati su architetture parallele di processori. Tale tipo di architettura richiede, anch'essa, uno studio approfondito per poter sfruttare pienamente le sue potenzialità.

## 3.2 Storia del problema N-body:

Questo paragrafo è stato preso e tradotto da Aarseth (2003), "Gravitational N-body Simulation, Tools and Algorithms", capitolo 1.

Le indagini numeriche dei problemi N-body nello spirito moderno si può dire che sono iniziate con lo sforzo pionieristico di von Hoerner [1960]. Le strutture di calcolo a quel tempo erano abbastanza primitive e aveva bisogno di un atto di fede per intraprendere una tale impresa incerta, perché far partire un programma voleva dire che il computer lavorava magari per settimane e alla fine si scopriva che c'era un errore, quindi prima di farlo partire bisognava controllare che tutto fosse apposto.

Guardando a questi primi risultati attraverso gli occhi dell'esperienza, si può vedere che gli elementi caratteristici della formazione binaria e la fuga sono già presenti per i numeri di particelle piccole come  $N = 16$ , poi aumentato a 25 [von Hoerner, 1963]. In principio, i metodi di integrazione sono stati in larga misura sperimentali e, pertanto, sulla base di prove ed errori. Ciò ha avuto l'effetto benefico artificiale di dare origine a una varietà di metodi, dal momento che ogni lavoratore sentiva l'obbligo di provare qualcosa di nuovo. Tuttavia, grazie all'evoluzione darwiniana è apparso subito chiaro che i time-steps della forza polinomiale e individuale sono stati ingredienti importanti nella ricerca di grandi  $N$  [Aarseth, 1963]. L'idea di base di un accordo tra la funzione di forza e tra i punti precedenti è quello di consentire un alto schema di integrazione, con gli intervalli corrispondenti che soddisfano i criteri di convergenza indicati. Soluzioni coerenti sono poi garantite da predizioni coordinate effettuate prima della somma delle forze di ogni particella. Allo stesso tempo, la mancanza di un metodo idoneo per far fronte ai binari persistenti ha ispirato l'introduzione di un potenziale di interazione più soft, per la separazione di "r" con "e", il parametro di ammorbidimento, che riduce l'effetto di incontri ravvicinati.

$$\Phi = \frac{-Gm}{(r^2 + e^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Questo potenziale dà origine a una semplice espressione per la forza tra due particelle. Quindi, un valore elevato della lunghezza della scala di ammorbidimento "e", descrive le dinamiche di un cosiddetto "sistema collisionale", mentre i valori più piccoli possono essere utilizzati per escludere la formazione di binari significativi.

Anche se l'applicazione era quella per ammassi di galassie, alcuni risultati generali sulla segregazione di massa sono stati ottenuti per  $N = 100$  e con lo spettro di massa [Aarseth, 1963]. In seguito il metodo di integrazione è stato migliorato fino al terzo ordine [Aarseth, 1966] per diventare alla fine uno di quarto ordine, assieme ad uno schema predictor-corrector [Aarseth, 1968], che è sopravvissuto per qualche tempo ed è stato ampiamente utilizzato.

Lo studio successivo di ammassi stellari da Wielen [1967] è stato effettivamente basato su un polinomio di quinto ordine con controllo degli errori speciale [Wielen, 1974]. Questo lavoro ha confrontato: gli estratti sui tempi di dimezzamento degli ammassi stellari simulati con le osservazioni e ha concluso che il tempo di vita media potrebbe essere valutato intorno ai  $2 \cdot 10^8$  anni.

Negli anni '70, la mancanza delle strutture di calcolo fece sì che le strade divennero due: o si effettuavano calcoli al valore massimo possibile di  $N$  oppure si intraprendeva uno studio più approfondito dei sistemi più piccoli. Quest'ultima scelta è stata fatta da van Albada [1968] e ha prodotto una notevole conoscenza sui processi fondamentali che coinvolgono la formazione di binari e scambi, così come l'energia delle particelle di fuga. Così è stato dimostrato che un binario dominante contenente le componenti più pesanti, in sistemi con un massimo di 24 corpi, acquisisce a volte più del 100% dell'energia totale iniziale.

Alcune interessanti proprietà di lunga durata triplica sono state presentate per la prima volta, compresa la prova per il cosiddetto "ciclo Kozai" di indotto eccentricità interiore. Sistemi di piccola taglia sono notoriamente difficili da integrare, ma qui uno speciale metodo di correzione del quarto ordine, rivelato molto preciso, a scapito di due valutazioni della forza peso ad ogni passo al fine di garantire la convergenza. Lo stesso procedimento viene utilizzato per tutte le particelle, ma questo diventa costoso sopra  $N \geq 10$  e lo schema dei singoli passi non è mai stato attuato.

Concentrandosi su un solo sistema, cioè senza fare una interazione, e utilizzando un computer specifico, è stato possibile raggiungere  $N = 250$  [Aarseth, 1968]. A causa di uno spettro di massa favorevole, con due corpi dominanti (cioè con un fattore di 5 in massa), il file binario finale ha acquisito circa 150% dell'energia totale iniziale. L'ammorbidente era ancora un fattore 10 al di sotto del piccolo semiasse maggiore finale, giustificando quindi questo dispositivo, che pone un limite inferiore sulla separazione binaria. La tendenza iniziale verso un maggiore realismo ha portato allo studio di due nuovi effetti. Dal momento che ammassi stellari aperti muovono su orbite galattiche quasi circolari, il campo esterno di marea può essere aggiunto alle equazioni del moto usando termini linearizzati. Il primo di questi progetti  $N$ -body è stato presentato da Hayli [1967, 1969, 1970, 1972]. Questo lavoro ha mostrato il comportamento caratteristico di stelle a bassa energia che fuggivano e che passavano vicino ai punti di Lagrange  $L_1$  e  $L_2$ .

Un secondo effetto relativo agli ammassi aperti è la perturbazione delle nubi interstellari. Il primo tentativo per  $N = 25$  [Bouvier & Janin, 1970] ha avuto alcuni problemi tecnici nel trattamento del confine, che sta a dimostrare che anche le procedure di selezione intuitiva possono essere fuorvianti. Più sopra, le particelle distanti esagerano il tempo di interruzione previsto in base alla variazione di energia totale. In questo caso il metodo di integrazione è stato ancora una volta di quarto ordine con due valutazioni della forza peso per passo. Anche se abbastanza preciso, un ordine elevato di espansione è troppo costoso per essere

pratico per  $N \geq 10$ . Sul lato positivo, l'inizializzazione di derivate superiori per forze normali polinomiali, utilizza l'approccio esplicito derivato con buoni risultati.

Alla fine del 1960, molti sforzi sono stati fatti per sfruttare le regolarizzazioni di due corpi formulata da Kustaanheimo & Stiefel [1965, poi KS]. È diventato chiaro che i trattamenti speciali di binari energetici sono auspicabili al fine di studiare l'evoluzione a lungo termine dei sistemi punto-massa. Un coraggioso tentativo di evitare le complicazioni apparenti del metodo KS per le applicazioni N-body è basato sulla variazione del metodo di parametri [Aarseth, 1970]. Il binario centrale dominante che emerge di solito è stato rappresentato dall'osculatore (o istantaneo) con due corpi. A parte alcuni problemi a causa di perturbazioni secolari, il metodo funziona abbastanza bene. Aveva anche il vantaggio di permettere soluzioni imperturbate che accelerano il calcolo. Sul lato di debito, il metodo deve essere sostituito da integrazioni dirette di perturbazioni significative. Eppure, gran parte delle esperienze utili di algoritmi decisionali è stata acquisita da questa applicazione della meccanica celeste.

L'impulso per l'introduzione di miglioramenti di KS è stato ispirato dalla bella soluzione con tre corpi illustrata graficamente da Szebehely & Peters [1967]. Tuttavia, lo sviluppo Hamiltoniano di Peters [1968] per il problema con tre corpi bypassa il problema di valutare l'energia del cambiamento dominante del moto di due corpi da un calcolo esplicito di  $N(N-1)/2$  termini regolari, che è troppo costoso nel caso generale. Questo è stato alla fine risolto con l'introduzione di un'equazione aggiuntiva del moto per il cambiamento dell'energia dei due corpi a causa delle perturbazioni. Così, al momento della IAU Colloquium 10 dei problemi N-body solo due codici generali sono stati presentati, tra cui le regolarizzazioni di KS [Aarseth, 1972; Bettis & Szebehely, 1972]. Purtroppo, quest'ultima si rivelò troppo costosa per impianti di grandi dimensioni in quanto viene impiegato un integratore di ordine elevato Runge-Kutta e non è stato ulteriormente sviluppato. Tuttavia, si rivelò se stesso in una indagine ad alta velocità di fuga in sistemi di piccole dimensioni [Allen & Poveda, 1972].

Sul fronte personale, per i prossimi anni ha visto alcune applicazioni interessanti. Una collaborazione ha adottato le condizioni iniziali gerarchiche ispirate dalla teoria di frammentazione [Aarseth & Hills, 1972], che ha portato ad alcune interazioni energetiche. È ormai ben noto che gli ammassi molto piccoli mostrano segni di subclustering. Un altro sforzo ha esaminato l'impoverimento delle stelle di piccola massa e ha concluso che l'effetto preferenziale era un po' minore del previsto sul piano teorico [Aarseth & Wolf, 1972]. Si discusse anche la questione dell'arrestare del collasso del nucleo dei binari energetici [Aarseth, 1972].

È stato dimostrato che un binario centrale può acquisire una frazione significativa dell'energia totale anche per i sistemi con  $N = 500$ ; un calcolo che ha circa 500 ore per essere completato [Aarseth, 1974]. È interessante notare che il binario dominante acquisisce il 50% dell'energia totale dopo solo 12 passaggi. Infine, un piccolo contributo conteneva la prima simulazione di ciò che oggi chiamiamo file binari primordiali [Aarseth, 1975], che è diventata una grande industria. Il 1970 ha

portato un paio di importanti sviluppi tecnici che sono ancora in uso. In primo luogo ricordiamo il Ahmad-Cohen [1973] il prossimo schema. L'idea di base è quella di rappresentare la forza che agisce su una particella da una somma di due polinomi, con il contributo vicino viene aggiornato più frequentemente. Anche se ci sono complicazioni di programmazione a causa del cambiamento dei vicini, il metodo è davvero collisionale e velocizza il calcolo in modo significativo anche per valori molto modesti di  $N$ . Prima dell'avvento del calcolatore per impieghi speciali HARP, questo algoritmo ha facilitato la simulazione di modelli di galassie più grandi con  $N = 104$ , dove il guadagno può essere un fattore di 10. La seconda innovazione consiste in una combinazione di circostanze che risulta in un metodo di regolarizzazione three-body [Aarseth & Zare, 1974]. Questo è stato ottenuto con l'introduzione di due soluzioni accoppiate KS che permettono a due delle coppie di particelle di avvicinarsi l'una a l'altra arbitrariamente, a condizione che ciò non avvenga simultaneamente. Si scopre che la terza interazione modifica le equazioni del moto in modo che mantiene la regolarità, fino a quando la distanza corrispondente non sia la più piccola.

In seguito a questo sviluppo, la formulazione globale Heggie [1974] è stata un risultato notevole, soprattutto da quando è stata generalizzata per il problema con  $N$ -corpi. È forse sorprendente che, ai fini pratici, l'algoritmo basato sulle due soluzioni separabili KS è preferibile alla regolarizzazione globale per  $N = 3$ . Tuttavia, il trattamento di sole quattro particelle in modo simile ha dovuto aspettare una semplificazione tecnica, eventualmente concepita da Mikkola [1985]. Nel caso, il metodo di Ahmad-Cohen è stato combinato con lo standard KS nonché l'imperturbabile metodo di regolarizzazione a tre e quattro corpi, per formare l'embrionale NBODY, codice di 5, tutto questo verso la fine del 1970. Fin dall'inizio, il trattamento KS è stato generalizzato ad un numero arbitrario di coppie di particelle simultanee, rendendo necessaria una quantità considerevole di processi decisionali automatici. Un confronto tra i diversi metodi di regolarizzazione è stato effettuato per  $N = 3$  e  $N = 4$  [Alexander, 1986], mentre per i sistemi con pochi corpi è stato anche disponibile una revisione generale dei metodi di integrazione [Aarseth 1988]. Un primo studio del collasso del nucleo per  $N = 1000$  ha illustrato l'utilità delle nuove tecniche [Aarseth, 1985].

Concludiamo questa rassegna storica, notando che le idee per aumentare la velocità di calcolo sono state discusse in una fase iniziale [Aarseth & Hoyle, 1964]. In quel periodo un aumento del numero di particelle da 100 a 300 sembrava essere il limite pratico, sulla base di un argomento che ha dato il tempo di calcolo proporzionale a  $N^3$  per un dato grado di evoluzione. Questa analisi ha anche anticipato sviluppi successivi di introdurre una rappresentazione collisionale al fine di raggiungere valori molto più grandi di  $N$ . È stato stimato che un metodo di shell, con un massimo di cinque sfere armoniche, permetterebbe  $N = 5000$ , per adattarsi alla memoria corrente massima di 64 KB. I tempi moderni hanno visto alcuni progressi significativi, sia per quanto riguarda software e il problema  $N$ -body è maturato e stiamo entrando in una zona nuova ed emozionante.

## 4. Il metodo di K. Kuijken e J. Dubinski

### 4.1 La funzione di distribuzione (DF)

Questo paragrafo è stato preso e tradotto dall'articolo di K. Kuijken e J. Dubinski "Nerly self-consistent disc-bulge-halo models for galaxies" capitolo 2.

Il punto di partenza di una simulazione N-body è la scelta della DF sotto forma analitica, scritta in termini di integrale del moto. Ogni DF rappresenta un modello equilibrato in tutti i potenziali gravitazionali che rispettano quegli integrali, con uno spazio di densità esplicitamente determinato da questo potenziale. Possiamo quindi costruire dei modelli auto gravitazionali a patto che il potenziale e la densità siano relazionate all'equazione di Poisson. Questo ultimo passo deve essere fatto numericamente.

$$\nabla^2\varphi = -4\pi G[\rho_{\text{disco}}(R, \Psi, \Psi_z) + \rho_{\text{centro}}(\Psi) + \rho_{\text{alone}}(R, \Psi)]$$

### 4.2 La funzione di distribuzione del centro

Per la DF del centro si usa un modello (King 1966)

$$f_{\text{centro}}(E) = \begin{cases} \rho_b (2\pi\sigma_b^2)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{\Psi_0 - \Psi_c}{\sigma_b^2}\right] \left\{ \exp\left[-\frac{E - \Psi_c}{\sigma_b^2}\right] - 1 \right\} & E < \Psi_c \\ 0 & E > \Psi_c \end{cases}$$

Dove E è l'energia totale  $E = \Psi + \frac{1}{2}v^2$  e  $\Psi$  il potenziale gravitazionale.

Dipende da tre parametri:  $\Psi_c$  potenziale del centro,  $\rho_b$  approssimativamente la densità del centro e  $\sigma_b$  che governa la dispersione delle velocità delle componenti del centro.  $\Psi_0$  è il potenziale gravitazionale al centro del modello.

La densità delle componenti del centro in un potenziale  $\Psi$  è ottenuta integrando la sua DF per tutte le velocità  $\rho = \int DF d^3v$  ottenendo

$$\rho_{\text{centro}}(\Psi) = \rho_b \left[ e^{\frac{\Psi_0 - \Psi}{\sigma_b^2}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{(\Psi_c - \Psi)/\sigma_b^2} - \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\Psi_0 - \Psi}{\sigma_b^2}} \left( 2\sqrt{\Psi_c - \Psi/\sigma_b^2} - \frac{4}{3} \frac{[\Psi_c - \Psi/\sigma_b^2]^3}{2} \right) \right) \right]$$

### 4.3 La funzione di distribuzione dell'alone

Per la DF dell'alone si usa un modello semplificato di Evans (Kuijken & Dubinski 1994). Questa DF è un troncamento a energia zero del modello scoperto da Evans (1993) per il potenziale logaritmico appiattito.

$$f_{alone}(E, L_z^2) = \begin{cases} [(AL_z^2 + B) \exp\left(-\frac{E}{\sigma_0^2}\right) + C] [\exp\left(-\frac{E}{\sigma_0^2}\right) - 1] & E < 0 \\ 0 & E > 0 \end{cases}$$

Dove  $L_z$  è il momento angolare, A, B, C sono dei parametri costanti e  $\sigma_0$  è una dispersione di velocità.

La densità corrispondente è

$$\begin{aligned} \rho_{alone}(R, \Psi) = & \frac{1}{2} \pi^{3/2} \sigma_0^3 (AR^2 \sigma_0^2 + 2B) \operatorname{erf}(\sqrt{-2\Psi}/\sigma_0) \exp(-2\Psi/\sigma_0^2) \\ & + (2\pi)^{3/2} \sigma_0^3 (C - B - AR^2 \sigma_0^2) \operatorname{erf}\sqrt{-\Psi/\sigma_0} \exp(-\Psi/\sigma_0^2) \\ & + \pi\sqrt{-2\Psi} \left[ \sigma_0^2 (A\sigma_0^2 R^2 + 2B - 4C) + \frac{4}{3} \Psi (2C - A\sigma_0^2 R^2) \right] \end{aligned}$$

La DF dell'alone ha quattro parametri liberi: la dispersione di velocità  $\sigma_0$ , la densità scalare  $\rho_1$ , il raggio del nucleo dell'alone  $R_c$  e il parametro di appiattimento q. Gli ultimi tre sono contenuti nei parametri A, B, C che sono uguali a

$$A = \frac{8(1 - q^2)G\rho_1^2}{\pi^2 q^2 \sigma_0^7} \quad B = \frac{4R_c^2 G\rho_1^2}{\pi^2 q^2 \sigma_0^5} \quad C = \frac{(2q^2 - 1)\rho_1}{(2\pi)^{3/2} q^2 \sigma_0^3}$$

#### 4.4 La funzione di distribuzione del disco

Nella costruzione della funzione del disco realistica con una terza integrale del moto, il rilascio di un terzo integrale non può essere evitato perché è un fatto osservato che nel vicinato solare e nei dischi delle altre galassie le dispersioni verticali e radiali sono diverse, che non è possibile in qualsiasi DF che dipende solo da energia  $E$  e momento angolare  $L_z$ . L'approssimazione più semplice del terzo integrale in un sistema a disco asimmetrico è l'energia nell'oscillazione verticale,  $E_z \equiv \Psi(R, z) - \Psi(R, 0) + \frac{1}{2} v_z^2$ . È abbastanza ben conservato lungo orbite quasi circolari che non hanno grandi escursioni radiali o verticali. Armati di una terza integrale, la DF del disco può essere costruita estendendo la DF planare discussa da Shu (1969) e Kuijken & Tremaine (1992) nella dimensione verticale. Così abbiamo:

$$f_{disco}(E_p, L_z, E_z) = \frac{\Omega(R_c)}{(2\pi^3)^{1/2} \kappa(R_c)} \frac{\tilde{\rho}_d(R_c)}{\tilde{\sigma}_r^2(R_c) \tilde{\sigma}_z(R_c)} \exp\left[-\frac{E_p - E_c(R_c)}{\tilde{\sigma}_R^2(R_c)} - \frac{E_z}{\tilde{\sigma}_z^2(R_c)}\right]$$

Dove,  $E_p \equiv E - E_z$  è l'energia nel movimento planare,  $L_z$  è il momento angolare specifico dell'asse di simmetria,  $R_c$  e  $E_c$  il raggio e l'energia di un'orbita circolare con momento angolare  $L_z$ ,  $\Omega$  e  $\kappa$  sono le frequenze circolari ed epicycloidali a raggio  $R_c$ . La densità corrispondente è ottenuta integrando per tutte e tre le componenti della velocità. Le integrali di  $v_R$  e  $v_z$  sono semplici, rimane l'integrale di  $v_\phi$ .

$$\rho_{disco}(R, z) = \int_0^\infty \left[ dv_\phi \equiv dR_c \left( \frac{R_c \kappa(R_c)^2}{2R\Omega(R_c)} \right) \right] \frac{2 \tilde{\rho}_d(R_c) \Omega(R_c)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}_R(R_c) \kappa(R_c)} \\ \times \exp \left[ -\frac{\Psi(R, 0) - (R_c, 0)}{\tilde{\sigma}_R^2(R_c)} - \left( \frac{R_c^2}{R^2} - 1 \right) \frac{v_c^2(R_c)}{2\tilde{\sigma}_R^2(R_c)} - \frac{\Psi(R, z) - \Psi(R, 0)}{\tilde{\sigma}_R^2(R_c)} \right]$$

La DF per i vari componenti di tutte le galassie implica una densità volumica unica in un potenziale dato. Per costruire un modello auto gravitazionale, abbiamo bisogno di trovare il potenziale dove la combinazione delle densità è anche quella implicita dall'equazione di Poisson.

#### 4.5 Un modello campione

Il vantaggio di modelli di galassie costruiti dalle funzioni di distribuzione è che le cinematiche sono completamente specificate. In questo paragrafo viene descritto come queste informazioni cinematiche possono essere utilizzate per creare condizioni di equilibrio iniziale per simulazioni N-body di galassie con disco, centro e alone, e fornire alcuni risultati.

	Disco					Centro			Alone				
Modello	$M_d$	$R_d$	$R_t$	$z_d$	$\delta R_{out}$	$\Psi_c$	$\sigma_b$	$\rho_b$	$\Psi_0$	$\sigma_0$	$q$	$C$	$R_a$
VL-A	0.87	1	5	0.1	0.5	-2.3	0.71	14.5	-4.6	1	1	0.1	0.8
VL-B	0.87	1	5	0.1	0.5	-2.9	0.71	14.5	-5.2	0.96	1	0.1	0.8
VL-C	0.87	1	5	0.1	0.5	-3.7	0.71	14.5	-6	0.93	1	0.1	0.8
VL-D	0.87	1	5	0.1	0.5	-4.7	0.71	14.5	-7	0.92	1	0.1	0.8

Tabella 1: Parametri per 4 modelli di Via Lattea  
Dati: Ricavati dall'articolo

$M_d$  = massa del disco,  $R_d$  = raggio scalare del disco,  $R_t$  = raggio troncato del disco,  $z_d$  = altezza scalare del disco,  $\delta R_{out}$  = larghezza troncata del disco,  $\Psi_c$  = potenziale di taglio del centro,  $\sigma_b$  = dispersione della velocità del centro,  $\rho_b$  = densità centrale del centro,  $\Psi_0$  = potenziale centrale dell'alone,  $\sigma_0$  = dispersione della velocità dell'alone,  $q$  = appiattimento del potenziale dell'alone  $C$  = concentrazione dell'alone,  $R_a$  = raggio caratteristico dell'alone, VL = via lattea

## 5. I primi esperimenti numerici

### 5.1 Scontri tra galassie

Lo scontro tra galassie è un evento abbastanza comune nello spazio e si può verificare in maniera violenta o tranquilla. Nel primo caso ne risulta una grande produzione di nuove stelle, nel secondo una fusione che genera una nuova galassia.

Nei rari casi di collisioni frontali si hanno due possibilità: se la velocità con cui avviene l'urto è dell'ordine del centinaio di chilometri al secondo, le due galassie si fondono formando un unico oggetto; se la velocità è maggiore, le due galassie conservano la loro identità, ma subiscono radicali cambiamenti di forma. Simulazioni effettuate con calcolatori hanno mostrato che le distorsioni più comuni consistono nello scambio di stelle fra i due sistemi e nella formazione di ponti o code luminose. In entrambi i casi, l'estrema rarefazione delle stelle fa sì che l'unica componente soggetta a un vero e proprio scontro sia la materia interstellare presente nelle due galassie.

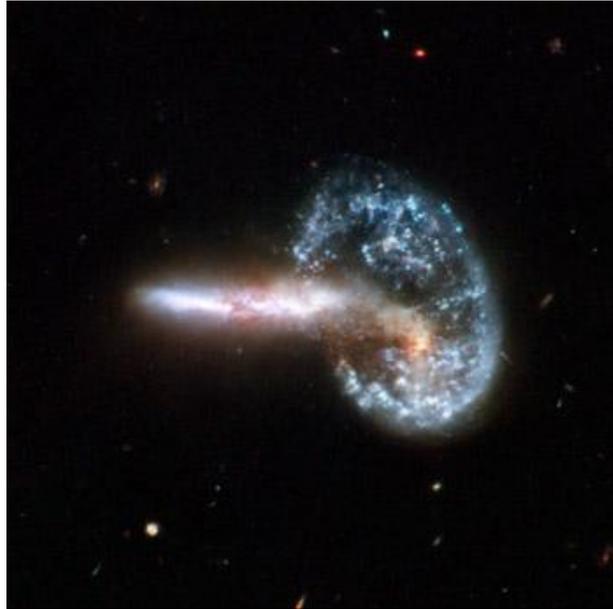


Figura 8: Interazione galassia Arp 148

Credito: NASA, ESA, the Hubble Heritage (STScI/AURA)-ESA/Hubble Collaboration, and A. Evans

Nelle zone centrali degli ammassi di galassie più densi il gran numero di scontri può portare alla fusione di molte galassie in un unico grande sistema. Tale fenomeno sembra in grado di spiegare alcune delle proprietà delle galassie ellittiche giganti che si osservano al centro di molti grandi ammassi.

Il primo esperimento di simulazioni al computer di interazioni tra galassie è stato fatto dai fratelli Toomre, Alar e Juri tra il 1971 e il 1973, dove una massiccia particella rappresentava il centro della galassia, delle piccole particelle rappresentavano le stelle che orbitano attorno al centro e vennero ignorati i gas, le polveri della galassia e la materia oscura. Quindi le galassie non furono molto realistiche, però i risultati gli portarono a scoprire la provenienza delle galassie irregolari con code di stelle. Attraverso svariate prove, scoprirono che le galassie delle Antenne erano il risultato dello scontro tra due galassie più piccole.

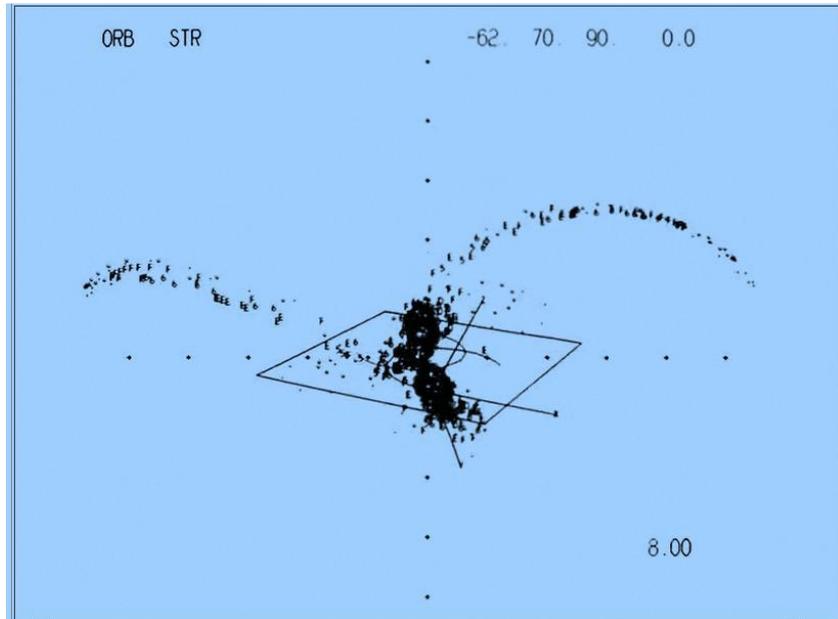


Figura 9: esperimento di un interazione tra 2 galassie  
 Credito: esperimenti di Toomre



Figura 10: Le galassie delle Antenne

Credito: NASA, ESA, the Hubble Heritage (STScI/AURA)-ESA/Hubble Collaboration, and A. Evans

## 5.2 Le galassie delle Antenne

Le galassie delle Antenne sono visibili nella costellazione del Corvo e sono note anche con le sigle di catalogo NGC 4038/4039. Devono il loro nome alle due lunghe strutture filamentose che da esse si diramano verso l'esterno, formate da gas, polveri e stelle (Figura 10). Le due galassie sono in interazione da alcune centinaia di milioni di anni; le intense onde d'urto hanno provocato in entrambe

un'esplosione dei fenomeni di formazione stellare (starburst) e le loro enormi regioni H II, nebulose di gas ionizzato dalla radiazione ultravioletta delle stelle giovani, blu e calde, che producono centinaia di ammassi di stelle giovani e massicce che secondo alcune teorie potrebbero in futuro diventare degli ammassi globulari. Le zone di formazione stellare si trovano infatti sempre in corrispondenza di questo tipo di oggetti nebulosi.

Un ammasso globulare è un insieme sferoidale di stelle che orbita come un satellite intorno al centro di una galassia. Gli ammassi globulari sono sorretti al loro interno da una forte gravità, che mantiene al loro centro una densità di stelle molto elevata.

### 5.3 La storia delle galassie delle Antenne

Circa 1,2 miliardi di anni fa, le Antenne erano due galassie separate: NGC 4038 era una galassia spirale, mentre NGC 4039 era una spirale barrata, e le loro dimensioni erano molto simili. 900 milioni di anni fa, le due galassie iniziarono ad interagire fra loro. 600 milioni di anni fa, le galassie si scontrarono, passando l'una attraverso l'altra, mentre 300 milioni di anni fa, iniziarono a "scambiarsi" le stelle. Oggi, il loro scontro è testimoniato dai lunghi filamenti di stelle, che appaiono come dei "bracci di spirale aperti". Si calcola che, tra circa 400 milioni di anni, il loro nucleo si fonderà, incrementando la formazione stellare e creando un'unica galassia ellittica gigante.



**Figura 11: La nuova immagine ripresa dal telescopio spaziale Hubble è la più nitida mai vista del centro della coppia di galassie Antenne che si fondono.**

**Credito: NASA, ESA, the Hubble Heritage (STScI/AURA)-ESA/Hubble Collaboration, and A. Evans**

Mentre le due galassie collidono tra loro, nascono miliardi di stelle, per lo più in gruppi ed ammassi. L'universo è sede di processi in lenta e continua evoluzione, la nuova immagine (Figura 11) ripresa dalla Camera ACS a bordo del telescopio spaziale Hubble evidenzia un violento scontro tra una coppia di galassie prima isolate, scontro che si trasforma in un matrimonio prolifico di stelle. I più luminosi e compatti ammassi così generati sono chiamati superammassi.

La collisione ha avuto inizio circa 500 milioni di anni fa facendo delle Antenne la coppia di galassie in collisione più giovane e più vicina a noi. Quasi la metà dei deboli oggetti visibili nell'immagine sono ammassi giovani formati da decine di migliaia di stelle. Le due grosse macchie arancione costituiscono i due nuclei delle galassie originali, formati da stelle vecchie e attraversati da filamenti di polvere scura.

I punti azzurri brillanti sono regioni di formazione stellare circondate da idrogeno rosaceo. Soltanto il 10% circa dei giovani super ammassi sopravvivrà oltre il milione di anni. La maggior parte degli ammassi formati si disperderà e le stelle si distribuiranno individualmente nella galassia. Tuttavia si prevede che circa un centinaio degli ammassi più consistenti sopravvivrà per formare normali ammassi globulari simili a quelli della nostra Via Lattea.

Le lunghe antenne da cui la coppia prende il nome, visibili nelle immagini dei telescopi a terra, si formarono dallo scontro iniziale 500 milioni di anni fa e ci danno una previsione di ciò che potrà accadere alla nostra Via Lattea quando verosimilmente colliderà con la vicina Andromeda tra circa 6 miliardi di anni.

## 6. Tecniche e metodi per le simulazioni numeriche

Le simulazioni N-Body sono state usate per studiare una gran varietà di sistemi astrofisici, che spaziano dai piccoli clusters di stelle alle galassie, fino alla formazione di strutture su grande scala dell'Universo.

La tecnica che calcola direttamente l'interazione per ogni coppia di corpi (PP da Particle-Particle) ha alcuni vantaggi rispetto agli altri metodi N-Body. In particolare offre un ampio range dinamico in risoluzione spaziale e non impone limiti geometrici sui sistemi da considerare. Ad ogni modo presenta un fondamentale svantaggio quando la quantità dei corpi (o particelle) comincia ad essere elevata (già a  $10^5$ ), dal momento che il numero di calcoli necessario al calcolatore è dell'ordine di  $O(N^2)$  con  $N$  che rappresenta il numero di corpi del sistema. Da ricordare che l'elaboratore impegna tempo e risorse al fine di svolgere calcoli, quindi maggiore sarà la quantità di operazioni, più tempo e risorse verranno impiegate.

Sono state ottenute negli ultimi anni tecniche più efficienti sacrificando alcune caratteristiche che il metodo PP poteva vantare. Tipicamente vengono imposti dei vincoli al range dinamico in risoluzione spaziale, alla geometria globale, alle condizioni di contorno. In molte situazioni tali limitazioni non sono rilevanti, anche se ci sono categorie di problemi in cui queste restrizioni hanno notevole importanza: per esempio, sistemi con alti contrasti di densità o distribuzioni asimmetriche.

### 6.1 Metodi PP e Metodi basati su reticolo (mesh)

Esistono due tipologie base per trattare i sistemi a molti corpi:

quella basata sull'interazione diretta e quella basata sulla griglia: il corpo puntiforme interagisce indirettamente con un altro attraverso il potenziale calcolato dalle densità di quest'ultimo su un reticolo. I metodi basati sulla griglia in genere vengono utilizzati per problemi con risoluzione spaziale continua, come i fluidi e i gas, mentre i metodi basati sull'interazione diretta sono sfruttati per sistemi discreti come un insieme le stelle all'interno di una galassia, o i gas rarefatti.

Molti sistemi fisici differenti che includono interazione gravitazionale o elettromagnetica sono governati dall'equazione di Poisson (vedi capitolo 4).

Per l'evoluzione temporale riferita ad un sistema di N corpi, la soluzione esatta del problema richiederebbe il contributo della forza che ogni corpo subisce da tutti gli altri corpi:

$$F_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_i m_j (x_j - x_i)}{|x_j - x_i|^3}$$

Questo per ogni intervallo di tempo.

Dal momento che in ambito astrofisico è comune avere dei sistemi che contengano diverse migliaia di elementi, è proibitivo per il calcolatore svolgere un numero di operazioni dell'ordine di  $O(N^2)$ .

Sono stati creati diversi metodi al fine di diminuire il numero di calcoli, dal PM<sup>4</sup> (particle-mesh) ad altri che incorporano una qualche forma di calcolo diretto della forza come il metodo PPPM<sup>5</sup> (particle-particle/particle-mesh) o il metodo MLC<sup>6</sup> (local-corrections), per correggere la forza su un gruppo locale di particelle.

Col passare del tempo sono state affinate tecniche riguardanti l'implementazione di un reticolo tanto che sono nati algoritmi che utilizzavano griglie capaci di adattarsi al fine di migliorare la precisione locale dei calcoli senza un numero proibitivo di calcoli (AMR, adaptive mesh refinement); invece di risolvere l'intero sistema con un reticolo di risoluzione fissa, questo veniva reso più fitto solo nelle regioni di interesse, mentre nelle restanti veniva utilizzata una risoluzione più bassa (quindi nodi del reticolo più distanti).

## 6.2 Metodo gerarchico o ad albero

Una classe di algoritmi utili per le simulazioni N-Body è rappresentata dai metodi gerarchici o ad albero; questi mantengono alcuni aspetti positivi della tecnica PP, infatti piuttosto che compromettere la risoluzione spaziale o imporre restrizioni di natura geometrica, questi metodi introducono approssimazioni nel calcolo del potenziale e della forza.

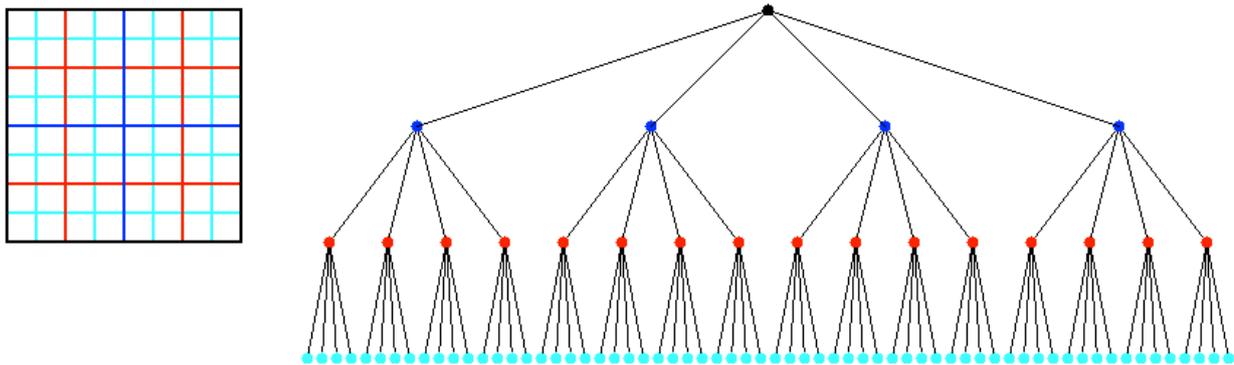
Innanzitutto è necessaria una struttura dati che suddivida lo spazio in modo tale che sia semplice la ricorsività. In 3 dimensioni la soluzione è rappresentata da un cubo diviso in otto parti uguali, anch'essi cubi (Oct-Tree), mentre in 2 dimensioni è sufficiente dividere il quadrato iniziale in quattro quadrati uguali (Quad-Tree). Verrà esposta una descrizione del problema in termini bidimensionali in quanto il caso tridimensionale è analogo.

La definizione del dominio (in questo caso bidimensionale) rappresenta il primo passo da compiere; il Quad-Tree comincia con un quadrato che copre tutto il dominio: tale quadrato è denominato *root*. Questo può essere, per l'appunto,

suddiviso in quattro quadrati più piccoli che hanno un perimetro pari a metà di root e un quarto di area ognuno; tali quadrati sono i *figli* di *root*. Ogni quadrato a sua volta rappresenta un *nodo*. (figura 12)

Ogni figlio può subire la stessa sorte del genitore essendo suddiviso in altri quattro quadrati che saranno i suoi figli. La struttura che si sta costruendo è pertanto un albero e tali suddivisioni possono essere iterate fino all'altezza desiderata dell'albero.

**A Complete Quadtree with 4 Levels**

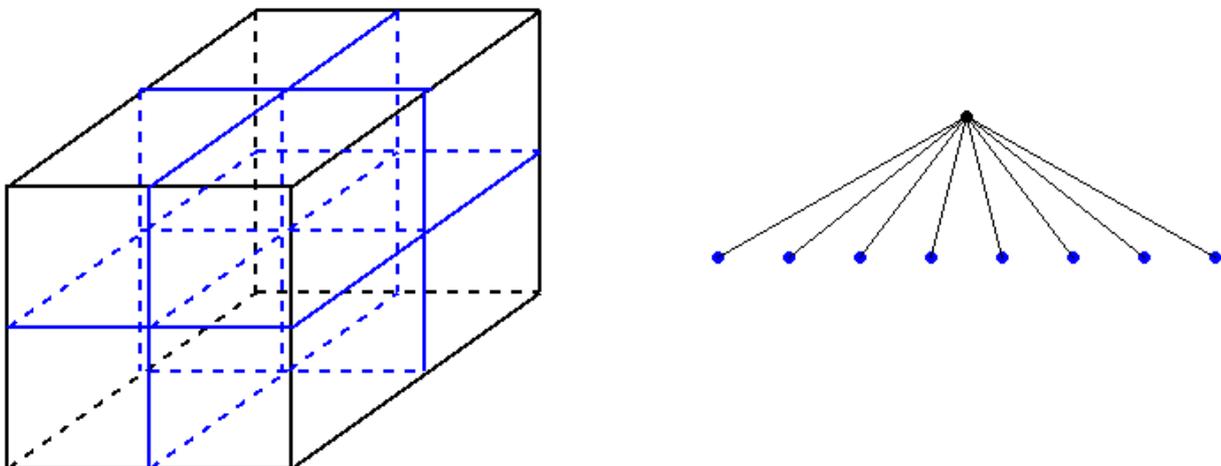


**Figura 12: Uno schema ad albero (Quadtree) completo con 4 livelli**

Credito: CS267: Lecture 24, 11 Aprile 1996 "Fast Hierarchical Methods for the N-body Problem, Part 1"

Un Oct-Tree è del tutto simile, ma cambia il numero di figli per nodo, in quanto la tridimensionalità del cubo, impone l'esistenza di 8 sottocubi. (Figura 13)

**2 Levels of an Octree**



**Figura 13: Un Octree con 2 livelli**

Credito: CS267: Lecture 24, 11 Aprile 1996 "Fast Hierarchical Methods for the N-body Problem, Part 1"

Gli algoritmi che verranno applicati per calcolare in ultima istanza le forze che agiscono su ogni corpo, fanno uso del metodo ad albero per immagazzinare i corpi stessi.

In tal modo, le *foglie* dell'albero, conterranno concettualmente le posizioni e le masse di quei corpi che sono ospitati nei relativi cubi.

Un caso particolarmente interessante si manifesta allorché i corpi non siano distribuiti in maniera uniforme sul dominio spaziale del problema, cosicché molte foglie risultano vuote, a fronte della aumentata altezza dell'albero dovuta a quelle regioni nelle quali è richiesta un'alta suddivisione. In tali casi, utilizzare risorse per immagazzinare dati relativi a zone vuote dell'albero, sarebbe uno spreco notevole.

Una soluzione brillante a questo tipo di problema è quella di continuare la suddivisione in figli solamente quando il nodo *genitore* contiene più di un corpo (o comunque un numero basso di corpi) (Figura 14). L'albero pertanto si adatta alla distribuzione di corpi tanto da ottenere un numero di foglie pari al numero di corpi. L'ordine con cui vengono immagazzinati i figli è antiorario partendo dal quadrato più basso a sinistra.

**Adaptive quadtree where no square contains more than 1 particle**

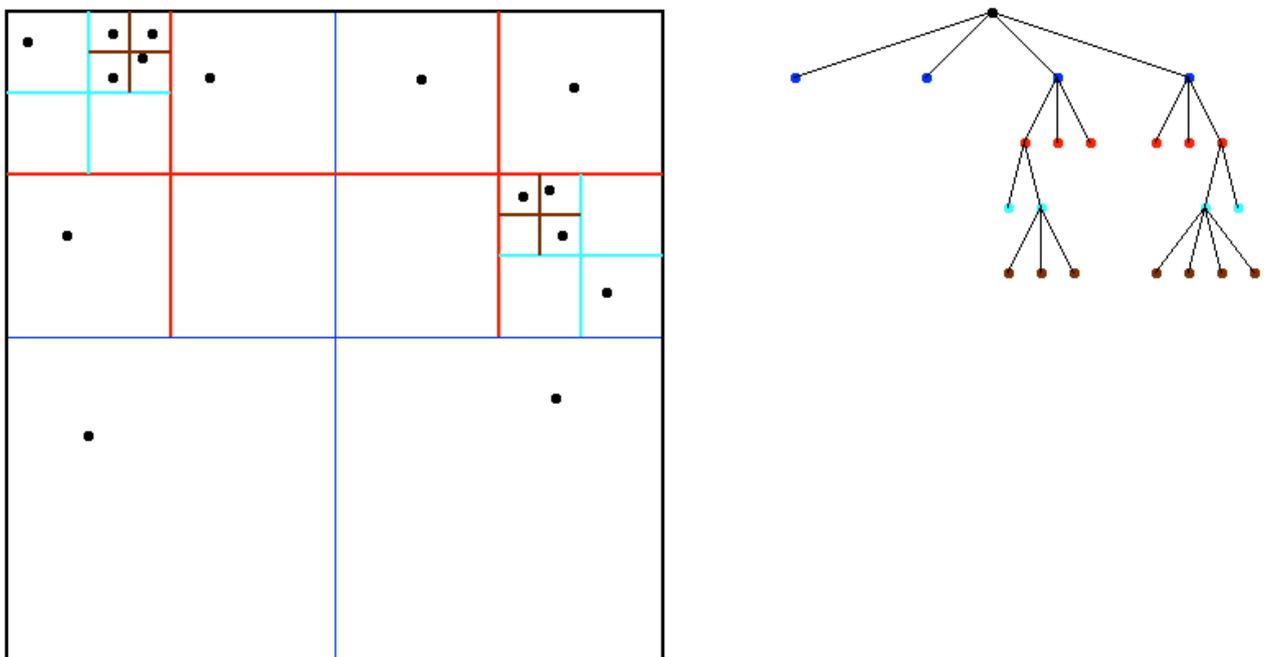


Figura 14: Schema ad albero (Quadtree) dividendo solo i quadrati contenenti più di un puntino  
Credito: CS267: Lecture 24, 11 Aprile 1996 "Fast Hierarchical Methods for the N-body Problem, Part 1"

La complessità nella costruzione di un albero dipende da come sono distribuiti i corpi all'interno del sistema. Il costo computazionale dell'inserimento di un corpo è proporzionale alla lontananza da root della foglia nella quale il corpo risiede (l'altezza viene misurata in livelli e root è a livello 0). Se i corpi sono tutti ammassati uno vicino all'altro, in maniera tale da giacere in un sottoquadrato, allora la complessità sarà elevata poiché molte foglie verranno a trovarsi lontane da root.

Tale distanza non sarà comunque superiore al numero di bits utilizzati per rappresentare le posizioni dei corpi, quantità che possiamo considerare costante. Se la distribuzione dei corpi è uniforme e quindi le foglie si attestano tutte più o meno allo stesso livello, la complessità dovuta all'inserimento di tutti i corpi sarà dell'ordine di  $O(n \log n)$ , dove  $n$  è il numero di corpi del sistema, quindi il risparmio in termini di calcoli passa da  $O(N^2)$  a  $O(n \log n)$ , che è una discreta diminuzione dei calcoli.

### 6.3 Algoritmo di Barnes-Hut

Questo algoritmo fu presentato da J. Barnes e P. Hut (1986), ed era basato su un precedente algoritmo di A.Appel (1985). È largamente usato in astrofisica ed è stato oggetto di tecniche di parallelizzazione. Non presenta un'elevata accuratezza, soprattutto rispetto al Fast Multiple Method (FMM) che verrà trattato in seguito. L'algoritmo di Barnes-Hut viene utilizzato quando è necessaria una precisione dell'1%, cosa che in ambito astrofisico spesso è sufficiente, soprattutto per le collisioni di galassie.

Recentemente è stato fatto notare che tale algoritmo può avere un'accuratezza peggiore dell'1% e si è cominciato ad operare al fine di risolvere questa lacuna: il risultato è un algoritmo che è una forma ibrida tra quello di Barnes-Hut e l'FMM.

L'algoritmo di Barnes-Hut compie i seguenti passi:

1. viene costruita la struttura dati ovvero l'albero (Tree)
2. per ogni nodo dell'albero, vengono calcolati il centro di massa e la massa totale
3. per ogni corpo, viene attraversato l'albero per calcolare la forza che tale corpo subisce (vedi formula della forza 6.1)

Per il primo punto vedi capitolo 6.2. Il secondo punto sfrutta l'attraversamento in senso inverso dell'albero ovvero i primi elementi ad essere processati sono i figli del nodo e poi il nodo stesso. Il costo computazionale di questo punto è proporzionale al numero di nodi presenti all'interno dell'albero, quindi dell'ordine di  $O(n)$ . Il cuore dell'algoritmo è rappresentato dal metodo con cui viene calcolata la forza che ogni corpo subisce dal resto del sistema. Siccome ad ogni timestep il sistema è

organizzato secondo la struttura gerarchica appena vista, per ogni corpo il calcolo della forza comincia attraversando l'albero partendo da root, ovvero la zona più alta della gerarchia.

Per calcolare la forza, vengono messe in rapporto due dimensioni: il lato del cubo che rappresenta il nodo corrente e la distanza tra il corpo che subisce la forza, e il baricentro del nodo stesso. La formula che lega queste due quantità è:

$$\frac{s}{d} \leq \theta$$

Dove  $s$  rappresenta per l'appunto l'estensione del nodo,  $d$  la distanza tra il corpo e il centro di massa del nodo mentre  $\theta$  è il cosiddetto parametro di tolleranza. Se tale condizione è verificata allora la struttura interna del nodo viene ignorata e la forza sul corpo in questione viene calcolata attraverso la formula di Newton. Al contrario, l'attenzione si porta sui figli del nodo, per ripetere tale criterio.

Nel caso quindi l'algoritmo sia in procinto di calcolare la forza gravitazionale, esso procede tenendo conto dei seguenti punti:

1.  $(x, y, z)$  è la posizione del corpo nel sistema tridimensionale
2.  $m$  rappresenta la massa di tale corpo
3.  $(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$  sono le coordinate del centro di massa dei corpi all'interno del nodo
4.  $m_{cm}$  è la massa totale dei corpi all'interno del nodo
5.  $G$  è la costante di Gravitazione

La forza gravitazionale è data dalla formula di Newton nelle tre componenti:

$$F(x, y, z) = Gmm_{cm} \left( \frac{(x_{cm} - x)}{d^3}, \frac{(y_{cm} - y)}{d^3}, \frac{(z_{cm} - z)}{d^3} \right)$$

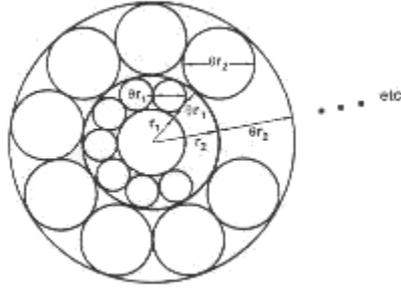
Dove  $d = \sqrt{(x_{cm} - x)^2 + (y_{cm} - y)^2 + (z_{cm} - z)^2}$  è proprio la distanza tra corpo e centro di massa del nodo.

Il parametro di tolleranza  $\theta$  può essere variato e, in definitiva, rappresenta il grado di accuratezza che richiediamo ad una simulazione che utilizzi questo algoritmo; ovviamente più piccolo sarà, più precisi saranno i calcoli, sebbene sia necessario un dispendio maggiore di lavoro da parte del calcolatore.

Per un  $\theta$  diverso da zero, una sommatoria su tutti gli  $N$  corpi è rimpiazzata da una sommatoria su  $\log N$  interazioni, pertanto invece di avere un costo

computazionale dell'ordine di  $O(N^2)$ , complessivamente si troverà  $O(n \log n)$ . Per dimostrare questa conseguenza attraverso un esempio, basta considerare un singolo corpo posto al centro di una sfera omogenea (vedi figura 15 )

Supponiamo di organizzare i corpi rimanenti in una struttura composta da celle. Il numero totale di interazioni può essere stimato dal numero di sottostrutture contenute entro i gusci concentrici che circondano l'origine, come mostrato nella figura 15.



**Figura 15: Rappresentazione schematica del calcolo della forza su una particella al centro di una sfera omogenea di particelle, utilizzando il metodo gerarchico.**

La distribuzione di massa all'interno di ogni guscio non verrà risolta suddividendo in maniera ulteriore in quanto  $\frac{s}{d} = \frac{r_i \theta}{r_i} = \theta$ . Ogni guscio conterrà un numero di sottounità dato approssimativamente da:

$$n_{sub}^i \approx \frac{4\pi r_i^3 \theta}{\frac{4}{3}\pi r_i^3 \frac{\theta^3}{8}} = \frac{24}{\theta^2}$$

Il numero totale di interazioni sarà  $n_{int} \approx (24n_{sh})/\theta^2 + n_0$  dove  $n_{sh}$  è il numero totale di gusci e  $n_0$  è il numero di interazioni dirette dovute ai corpi all'interno della sfera di raggio  $r_1$ .

Siccome vale  $r_1 = (1 + \theta)^{i-1} r_1$ , questo implica che  $r_{n_{sh}}/r_1 = (1 + \theta)^{n_{sh}-1}$ ; inoltre la dimensione dell'intero sistema,  $R$ , risulta essere  $R = r_{n_{sh}}(1 + \theta)$ .

Il raggio  $r_1$  è quello oltre il quale si cominciano a considerare le strutture come aggregati di corpi (celle), cioè  $r_1 = n^{\frac{1}{3}}/\theta$  dove  $n$  è la densità del numero di corpi pari a  $n = N/\frac{4}{3}\pi R^3$ .

Tenendo conto che  $n_0 = N(r_1/R)^3$ , attraverso alcuni passaggi algebrici si ottiene che:

$$n_{int} \approx \frac{24}{\theta^2} \frac{\log \left[ \theta \left( \frac{3N}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \right]}{\log(1 + \theta)} + \frac{4\pi}{3\theta^3}$$

(da notare che in questo caso  $\theta \geq (4\pi/3N)^{\frac{1}{3}}$ )

Il comportamento dominante per  $\theta > 0$  è  $n_{int} \approx (\log N)/\theta^2$ , pertanto risulta dimostrato che il numero di operazioni necessarie a calcolare la forza su tutti gli  $N$  corpi scala come  $O(n \log n)$ . In definitiva quindi, l'algoritmo di Barnes-Hut, associato all'implementazione di una struttura dati di tipo gerarchico, offre un'importante riduzione del costo di calcolo comparato col metodo PP, a spesa di un piccolo ma controllabile errore nel calcolo della forza.

## 6.4 Fast multiple method (fmm)

Questo algoritmo fu per la prima volta pubblicato da Rokhlin (1985) e Greengard & Rokhlin (1997).

Tale metodo può condividere la struttura ad albero utilizzata dall'algoritmo di Barnes-Hut, mentre le differenze salienti sono:

- FFM calcola un'espressione per il potenziale ad ogni punto, non la forza come in Barnes-Hut.
- FMM necessita di più informazioni di quanto siano semplicemente la massa e il centro di massa dei corpi nelle box. Tale incremento di informazioni rende certamente i calcoli più accurati ma anche più costosi in termini di CPU. D'altra parte FMM utilizza un set fisso di box per ottenere il potenziale, piuttosto che un set variabile che dipende da un parametro di tolleranza come può essere l'angolo, e dalle coordinate anch'esse variabili del centro di massa. In pratica laddove l'algoritmo di Barnes-Hut utilizza una piccola quantità di informazioni per ogni box, ma un set di box variabili a seconda della precisione desiderata, FMM dispone di un'ampia quantità di informazioni per box (dipendente dall'accuratezza), ma un set fisso di box.

La forza gravitazionale segue la legge dell'inverso del quadrato, cosicché la forza subita da un corpo nelle coordinate  $(x,y,z)$ , dovuta ad un altro corpo posto all'origine, è proporzionale a:

$$\vec{F}_{grav} \sim -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Con  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , la distanza che separa i due corpi.

In questo caso si ha a che fare con un vettore che ha tre componenti; un'astuzia in questo senso è proprio quella a trattare una quantità scalare, come è il potenziale.

### 6.4.1 Il potenziale

Generalmente consideriamo il potenziale come somma di componenti distinte:

$$\Phi = \Phi_{far} + (\Phi_{near} + \Phi_{external})$$

Dove  $\Phi_{near}$  è, quando esiste, un potenziale che decade rapidamente,  $\Phi_{external}$ , se presente, è indipendente dal numero di corpi, mentre  $\Phi_{far}$  è il potenziale di campo lontano, nel nostro caso di origine gravitazionale e componente fondamentale per i nostri studi.

L'espressione che mostra l'andamento del potenziale rispetto alla distanza è:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{r}$$

Inoltre la relazione che lega la forza al potenziale è:

$$\vec{F} = -\nabla\varphi(x, y, z) = -\left(\frac{d\varphi(x, y, z)}{dx}, \frac{d\varphi(x, y, z)}{dy}, \frac{d\varphi(x, y, z)}{dz}\right)$$

La strategia che caratterizza FMM è quindi quella di usare un'espressione per il potenziale  $\varphi$  che possa essere facilmente valutata, per poi utilizzare la derivata per ottenere la forza.

Per semplificare la trattazione si utilizza un esempio bidimensionale piuttosto che uno tridimensionale, ottenibile per analogia.

Innanzitutto notiamo che il potenziale in 3D, soddisfa l'equazione di Poisson(vedi 4.1):

$$\nabla^2\varphi = \left(\frac{d^2\varphi(x, y, z)}{d^2x} + \frac{d^2\varphi(x, y, z)}{d^2y} + \frac{d^2\varphi(x, y, z)}{d^2z}\right)$$

Tranne che nel punto  $(x,y,z)=0$ .

Possiamo analogamente richiedere che il potenziale bidimensionale soddisfi l'equazione di Poisson in due dimensioni:

$$\frac{d^2\varphi(x, y, z)}{d^2x} + \frac{d^2\varphi(x, y, z)}{d^2y}$$

Eccetto che nel punto  $(x, y) = 0$ . La soluzione per un corpo all'origine allora è:

$$\varphi(x, y) = \log(r)$$

Dunque:

$$F = -\nabla\varphi(x, y) = -\frac{(x, y)}{r^2} - \frac{(x, y)}{r^3}$$

Dove  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  è la distanza del corpo dall'origine. In questo caso quindi la forza è inversamente proporzionale alla distanza secondo la potenza di uno.

Se abbiamo  $n$  punti su un piano nelle posizioni  $z_1, z_2, \dots, z_n$  con  $z_i = (x_i, y_i)$  con rispettive masse  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , il loro potenziale nel punto  $(x, y)$  sarà:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \log\left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}\right)$$

### 6.4.2 Espansione di multiplo del potenziale

Un'espansione di multipolo del potenziale  $\varphi(x, y)$  è una sorta di sviluppo in serie di Taylor troncato ad un certo ordine. Consideriamo pertanto i numeri complessi  $z_i$  e  $z = (x, y)$  come punti sul piano; in questo modo potremo scrivere  $\varphi(x, y)$  come funzione del numero complesso  $z$ . Dal momento che:

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} = |z - z_i|$$

Tramite alcuni passaggi algebrici e mantenendo la notazione complessa otteniamo:

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n m_i \log(z - z_i)$$

Attraverso lo sviluppo in serie di Taylor per funzioni del tipo  $\log(1 - y)$  possiamo riscrivere, basandoci sui seguenti passaggi:

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n m_i \left[ \log(z) + \log\left(1 - \frac{z_i}{z}\right) \right]$$

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n m_i \log(z) + \sum_{i=1}^n m_i \log\left(1 - \frac{z_i}{z}\right)$$

$$\varphi(z) = M \log(z) + \sum_{j=1}^{\infty} z^{-j} \alpha_j \quad \text{con } \alpha_j = \sum_{i=1}^n \frac{m_i z_i^j}{j}$$

Invertendo le sommatorie

$$\varphi(z) = M \log(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^n m_i \frac{1}{j} \left(\frac{z_i}{z}\right)^j \right]$$

$$\varphi(z) = M \log(z) + \sum_{j=1}^{\infty} z^{-j} \left[ \sum_{i=1}^n m_i \frac{z_i^j}{j} \right]$$

$$\varphi(z) = M \log(z) + \sum_{j=1}^{\infty} z^{-j} \alpha_j \quad \text{con } \alpha_j = \sum_{i=1}^n \frac{m_i z_i^j}{j}$$

Un passo fondamentale è quello di troncare la serie ad un ordine  $p$ , ottenendo:

$$\varphi(z) = M \log(z) + \sum_{j=1}^p z^{-j} \alpha_j$$

L'errore dovuto a questa approssimazione è proporzionale al più grande tra i termini omessi, ovvero:

$$\left( \frac{\max |z_i|}{|z|} \right)^{p+1}$$

Per esempio se ci fosse un  $c > 1$  tale che  $|z| > c \max |z_i|$ , l'errore sarebbe proporzionale a  $1/c^{p+1}$ . Nello specifico, ipotizzando di avere tutti i corpi racchiusi in una box quadrata di lato  $s$  centrato nell'origine: in questa maniera risulta  $|z_i| \leq s/\sqrt{2}$ . Se supponiamo che  $z$  sia al di fuori di una box quadrata di lato  $3s$  sempre centrata nell'origine, (figura 16) allora  $|z_i| \geq 1.5s$ . Se venisse preso  $c = (1.5s)/(s/\sqrt{2}) = 3/\sqrt{2} \approx 2.12$ , l'errore dovuto al troncamento, dunque, sarebbe dell'ordine di  $O(2.12^{-p})$ .

Questa conclusione mostra che l'espansione multipolo può essere usata per i corpi nella box piccola, su ogni box della stessa dimensione non immediatamente adiacente ad essa: è il concetto di box "ben separate".

**Multipole error outside larger box  
is bounded by  $O((3/\sqrt{2})^{-p}) \sim O(2.12^{-p})$**

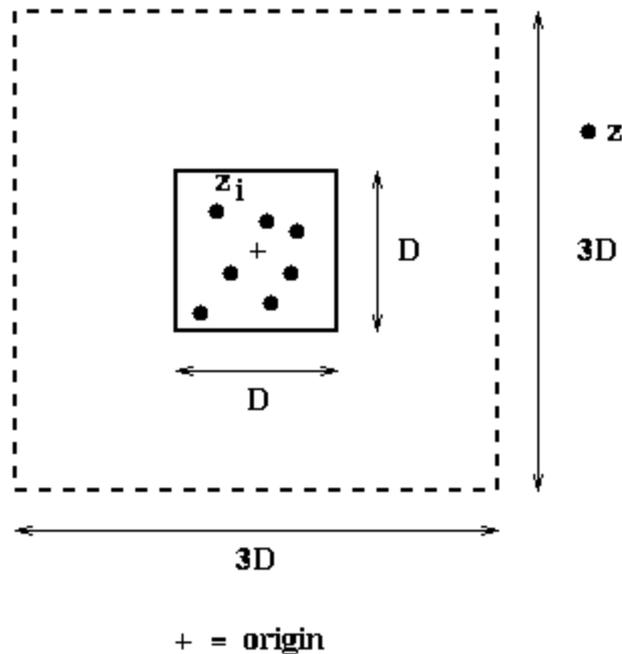


Figura 16: Errore dovuto al troncamento

Credito: CS267: Lecture 25, 16 Aprile 1996 "Fast Hierarchical Methods for the N-body Problem, Part 2"

Nel caso in cui la box non sia centrata nell'origine ma in uno  $z_c$  generico, la formula che riguarda l'espansione subisce un leggero cambiamento, divenendo così più generale:

$$\varphi(z) \approx M \log(z - z_c) + \sum_{j=1}^p \alpha_j (z - z_c)^{-j}$$

Quindi l'albero gerarchico, se si tratta un nodo  $n$  che corrisponde ad una box, si può definire una sorta di struttura dati che rappresenta l'espansione di multipolo legata proprio ad  $n$ :

$$Outer(n) = (M, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, z_c)$$

Questa notazione facilita sensibilmente la trattazione dell'argomento, vista l'imminente introduzione di argomenti quali le espansioni interne e le conversioni tra espansioni. In questo caso la parola "Outer" si riferisce alle informazioni per calcolare il potenziale valutato al di fuori dello spazio che contiene le particelle e dovuto ai corpi all'interno della superficie che li contiene.

### 6.4.3 Espansioni interne e conversioni tra espansioni

Visto che l'obiettivo finale è quello di calcolare il potenziale all'interno di  $n$ , dovuto ai corpi al di fuori di  $n$ , è necessario utilizzare un altro tipo di espansione: l'espansione interna.

$$\sum_{i=0}^p \beta_i (z - z_c)^i$$

Tenendo conto della figura 16, questa espansione rappresenterà il potenziale all'interno di una box di lato  $s$ , dovuto a tutti i corpi collocati esternamente alla box di lato  $3s$ . Questa espansione avrà come notazione:

$$Inner(n) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, z_c)$$

L'output dell'FMM consisterà in parte proprio dall'espansione interna per ogni nodo  $n$  dell'albero. L'ultimo tassello necessario a spiegare l'algoritmo è rappresentato dal modo in cui possono essere convertiti gli Outer e gli Inner.

Conversione tra due espansioni (Outer):

Nella figura 17,  $n_1$  è la sottobox blu di una box nera più grande  $n_2$ . Poniamo che  $z_1$  e  $z_2$  rappresentino il centro di  $n_1$  e  $n_2$ . Se supponiamo di conoscere  $Outer(n_1)$  allora sappiamo che l'espansione risulta accurata al di fuori della box blu tratteggiata sempre centrata in  $z_1$ , e, analogamente lo stesso discorso può essere relativo ad  $Outer(n_2)$  facendo riferimento alla box tratteggiata in nero centrata in  $z_2$ .

La differenza tra queste due espansioni risiede nel valore dei coefficienti  $\alpha_i$  e nella diversa collocazione del centro. Ad ogni modo esse rappresentano lo stesso potenziale se viene considerato solamente la regione al di fuori della box tratteggiata nera.

Using Outer\_Shift to convert Outer(n1) to Outer(n2)

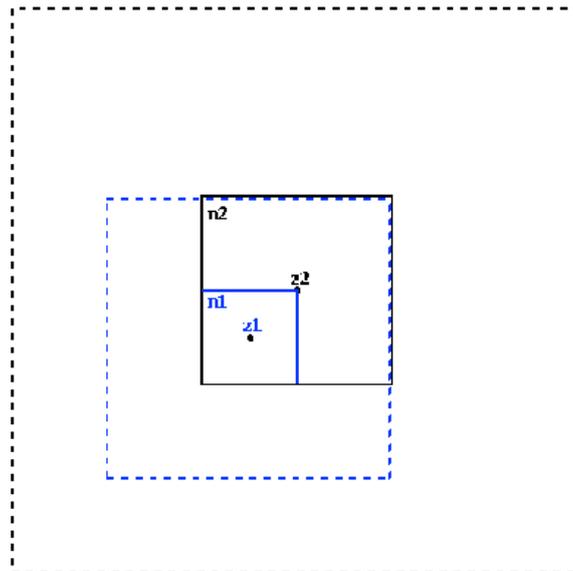


Figura 17: Conversione tra due espansioni

Credito: CS267: Lecture 25, 16 Aprile 1996 "Fast Hierarchical Methods for the N-body Problem, Part 2

In una forma più rigorosamente matematica:

$$Outer(n_1) = (M, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,p}, z_1)$$

$$Outer(n_2) = (M, \alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \dots, \alpha_{2,p}, z_2)$$

Cosicché, per uno  $z$  al di fuori della box tratteggiata in nero, le due espansioni si equivalgono:

$$M \log(z - z_1) + \sum_{i=1}^p \alpha_{1,i} (z - z_1)^{-i} = M \log(z - z_2) + \sum_{i=1}^p \alpha_{2,i} (z - z_2)^{-i}$$

Attraverso alcuni passaggi, possono essere mostrate le relazioni che intercorrono tra coefficienti  $\alpha_{1,i}$  e  $\alpha_{2,j}$

Sempre a livello di notazione possiamo chiamare tale conversione come:

$$Outer(n_2) = Outer_{shift}(Outer(n_1), center(n_2))$$

Dove il secondo argomento,  $Outer_{shift}$ , rappresenta il nuovo centro per l'espansione. L'utilità di questa conversione si noterà nel momento in cui l'algoritmo, al fine di calcolare l'Outer di un  $n$ , sfrutta gli Outer dei suoi figli.

Conversione tra due espansioni interne

Continuando ad utilizzare la figura 17, poniamo un'espansione interna  $Inner(n_2)$  definita per la box centrata in  $z_2$ :

$$Inner(n_2) = (\beta_{2,0}, \beta_{2,1}, \dots, \beta_{2,p}, z_2)$$

Per il potenziale interno di  $n_2$  dovuto a tutti i corpi al di fuori della box tratteggiata in nero. Questa espansione è valida anche per la box centrata in  $z_1$ , dal momento che  $n_1$  è all'interno di  $n_2$ .

Visto che,

$$Inner(n_1) = (\beta_{1,0}, \beta_{1,1}, \dots, \beta_{1,p}, z_1)$$

Da il potenziale all'interno di  $n_1$  dovuto allo stesso gruppo di punti all'esterno della box tratteggiata in nero, possiamo dedurre che:

$$\sum_{i=0}^p \beta_{1,i} (z - z_1)^i = \sum_{i=0}^p \beta_{2,i} (z - z_2)^i$$

Attraverso  $z_2$  e  $\beta_{2,i}$  si può calcolare  $\beta_{1,i}$ .

La notazione utilizzata per questa conversione è:

$$Inner(n_1) = Inner_{shift}(Inner(n_2), center(n_1))$$

Conversione di tipo misto:

L'ultima conversione che verrà trattata riguarda la trasformazione tra Outer e Inner. Le box in questione saranno chiamate  $n_3$  ed  $n_4$ , la cui caratteristica peculiare è che sono abbastanza distanti tra loro.

### Converting Outer( $n_3$ ) to Inner( $n_4$ )

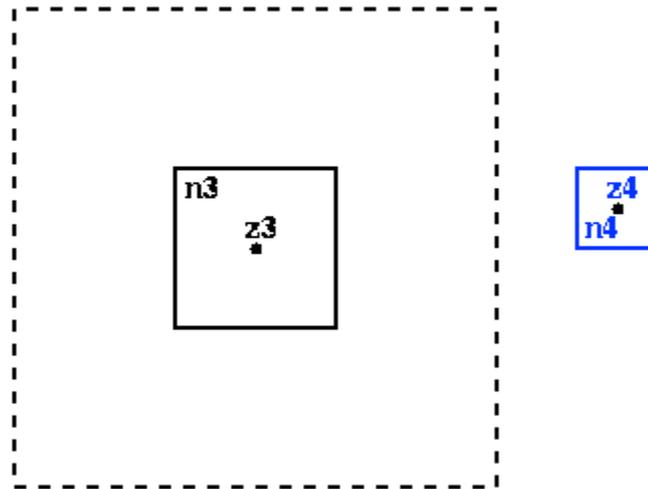


Figura 18: Conversione di tipo misto

Credito: CS267: Lecture 25, 16 Aprile 1996 "Fast Hierarchical Methods for the N-body Problem, Part 2"

Basandosi sulla notazione fin qui adottata:

$$Outer(n_3) = (M, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \dots, \alpha_{3,p}, z_3)$$

$$Inner(n_4) = (\beta_{4,0}, \beta_{4,1}, \dots, \beta_{4,p}, z_4)$$

Si ottiene:

$$M \log(z - z_3) + \sum_{i=1}^p \alpha_{3,i} (z - z_3)^{-i} \approx \sum_{i=0}^p \beta_{4,i} (z - z_4)^i$$

Come nei casi precedenti, possono essere calcolate le relazioni tra coefficienti. La notazione utilizzata per questo tipo di conversione è:

$$Inner(n_4) = Convert(Outer(n_3), center(n_4))$$

#### 6.4.4 Algoritmo Fast Multiple method

L'algoritmo FMM si svolge in quattro fasi:

1. Costruzione dell'albero

2. Attraversamento dell'albero a partire dalle foglie calcolando gli  $Outer(n)$  per ogni nodo

3. Attraversamento dell'albero a partire da root calcolando gli  $Inner(n)$  per ogni nodo

4. Per ogni foglia, aggiungere a  $Inner(n)$  i contributi dei nodi e dei corpi più vicini

1. Costruzione dell'albero ricalca la metodologia esplicita precedentemente, tranne che per un'efficienza maggiore dovuta al fatto che i nodi foglia possono contenere un numero di corpi superiore a uno. Basta quindi definire una costante  $k$  che rappresenta il numero massimo di corpi contenuti in un nodo.

2. Calcolo di  $Outer(n)$  per ogni nodo dell'albero (vedi figura 19)

Viene operato un attraversamento che parte dalle foglie per arrivare a root, durante il quale vengono calcolati gli  $Outer(c)$  di tutti i figli  $c$  del nodo  $n$ , per poi combinarli al fine di ottenere  $Outer(n)$ . Quindi le espansioni Outer dei figli  $c(i)$  sono combinate per formare quella relativa al nodo genitore  $n$ . In definitiva l'operazione da svolgere è una somma tra espansioni, più specificatamente la somma delle masse e dei coefficienti  $\alpha_i$ . Si può dimostrare, infatti, che la massa totale del nodon è frutto della somma delle masse dei singoli figli, ed è altrettanto possibile confermare che il potenziale dovuto ad un gruppo di corpi è la somma dei potenziali generati da ogni singolo corpo.

### Inner Loop of Build\_Outer

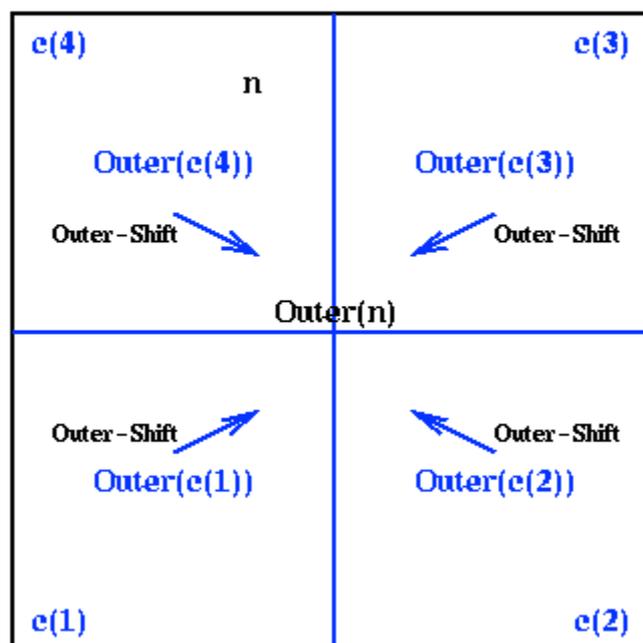


Figura 19: Calcolo degli  $Outer(n)$  per ogni nodo dell'albero

Credito: CS267: Lecture 25, 16 Aprile 1996 "Fast Hierarchical Methods for the N-body Problem, Part 2

3. Calcolo delle espansioni interne per ogni nodo La questione principale è riuscire a calcolare  $Inner(n)$  per ogni nodo con una quantità di lavoro costante da parte del calcolatore. La soluzione di combinare le espansioni interne a quelle di tipo Outer realizza il proposito.

### Interaction\_Set(n) for the Fast Multipole Method

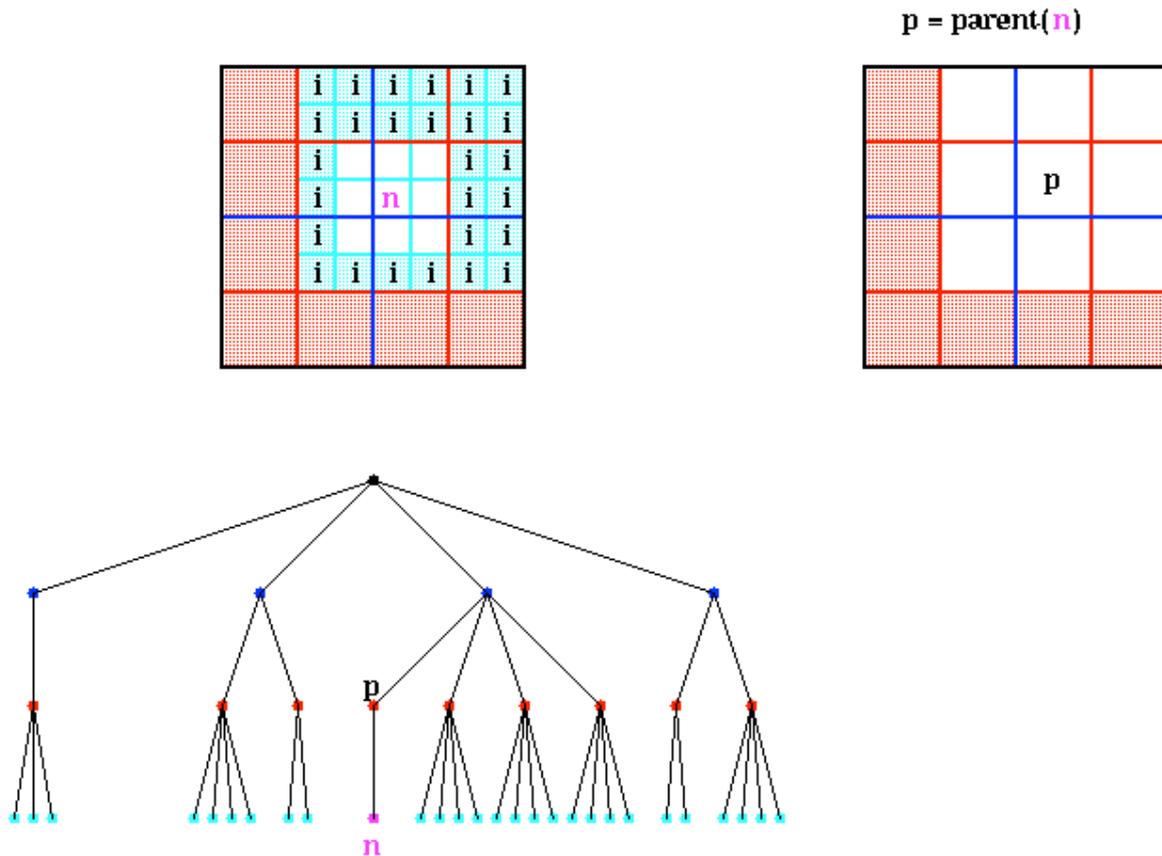


Figura 20: Calcolo delle espansioni interne per ogni nodo  
 Credito: CS267: Lecture 25, 16 Aprile 1996 "Fast Hierarchical Methods for the N-body Problem, Part 2"

Considerando il nodo  $p$  come genitore del nodo  $n$ , questa parte di algoritmo processa prima  $p$ , e, siccome si presuppone di aver già calcolato  $Inner(p)$ , il passo successivo è avvalersi di  $Inner_{shift}$  per trasportare il risultato ottenuto a disposizione del nodo  $n$ .

$$Inner_{shift}(Inner(p), center(n))$$

Questo converte l'espansione interna riferita a  $p$  adattandola al nodo  $n$ ; tale valore contribuirà ad  $Inner(n)$ . L'ultima parte di contributo arriva da quei nodi figli dei nodi vicini al genitore, che siano "ben separati" dal nodo  $n$  (nella figura 20, le

box azzurre). Formalmente possiamo affermare che tali nodi fanno parte di una lista di interazione relativa al nodo  $n$ :  $Interaction_{list}(n)$ . Per ognuno dei nodi  $i$  di tale lista, possediamo gli  $Outer(i)$  calcolati nel secondo passo dell'algoritmo. Visto che queste quantità rappresentano l'altro contributo per ottenere l'espansione interna totale di  $n$ ,  $Inner(n)$ , sarà indispensabile attuare la conversione:

$$Convert(Outer(i), center(n))$$

Dal momento che il numero di nodi possibili nella lista di interazione di un nodo è fisso (discorso a parte per i nodi collocati sul confine del dominio o in prossimità di esso), può essere calcolato sia per il caso d'esempio (bidimensionale) sia per quello reale (tridimensionale), arrivando alla conclusione che il lavoro necessario al calcolatore per svolgere questo compito è costante, sia in 2D che in 3D.

Sommare espansioni interne significa sommare tra loro i coefficienti  $\beta(i)$ , questo perché il potenziale relativo ad un gruppo di corpi è il risultato della somma dei potenziali dovuto ad ogni corpo.

#### 4. Contributi degli elementi più vicini:

I tre punti precedenti hanno consentito il calcolo di  $Inner(n)$  dovuto a tutti i corpi, con l'eccezione di quelli più vicini al nodo  $n$  e quelli interni allo stesso nodo  $n$ . Per il modo in cui viene costruito l'albero, tale numero risulta essere piccolo, cosicché il contributo di questi corpi potrà essere calcolato attraverso l'interazione diretta senza incidere sui tempi di lavoro.

## 6.5 Step temporali e metodo del leapfrog

Lo schema operativo di questa simulazione può essere riassunto come un processo iterativo in cui partendo da un tempo  $t$ , vengono calcolati come risultato finale le posizioni e le velocità dei corpi.

Terminato un ciclo di calcolo si fa avanzare il tempo di un timestep, o incremento temporale, e si ricostruisce la struttura dati ad albero per operare come nel ciclo precedente, disponendo delle variabili aggiornate.

La gestione temporale viene affidata generalmente ad un algoritmo attraverso il cui compito è possibile ottenere i valori delle posizioni e delle velocità dei corpi. Sebbene ne esistano di diverso tipo, ognuno coi propri pregi e difetti, l'attenzione in questo capitolo verrà incentrata sul metodo del leapfrog (salto della rana).

In generale dopo essere giunti ad avere i valori della forza che agiscono sui corpi in moto (tramite direttamente la legge di Newton o tramite derivazione del potenziale) si passa al calcolo dell'accelerazione mediante:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

per ottenere le componenti  $(x, y, z)$  dell'accelerazione che subisce il corpo in seguito all'azione della forza.

Il metodo del leapfrog agisce proprio in questo frangente, discretizzando il tempo  $t$ , e introducendo il timestep  $dt$ . L'accuratezza dei calcoli sarà tanto migliore quanto  $dt$  è più piccolo.

L'equazioni che fornisce il leapfrog sono le seguenti:

$$x_i^{n+1} - x_i^n = v_i^{n+\frac{1}{2}} dt$$
$$v_i^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{F(x_i^n)}{m_i} dt$$

Il metodo del leapfrog calcola la posizione e la velocità una alla volta con uno sfasamento temporale di  $dt/2$ . È interessante notare che in realtà non si conoscono la posizione e la velocità dei corpi nello stesso timestep, ma è come se si procedesse a salti (da qui il nome leapfrog).

La simulazione quindi procederà nella seguente maniera:

1. Avendo la posizione al tempo  $t$  si calcola la Forza e l'accelerazione
2. Viene utilizzata la forza calcolata per far avanzare la velocità del corpo dal tempo  $t - dt/2$  al tempo  $t + dt / 2$ . La velocità a  $t + dt / 2$  è data da:

$$v[\text{corpo}]_{x,y,z} = v[\text{corpo}]_{x,y,z} + a[\text{corpo}]_{x,y,z} dt$$

3. Viene usata la nuova velocità per aggiornare la posizione  $p$  a  $t + dt$ . Naturalmente è necessario assumere velocità costante tra  $t$  e  $t + dt$

$$p[\text{corpo}]_{x,y,z} = p[\text{corpo}]_{x,y,z} + v[\text{corpo}]_{x,y,z} dt$$

Una volta aggiornate le posizioni viene ricostruito l'albero per una nuovo ciclo di calcoli.

## 7. Conclusione

Con questo progetto siamo venuti a conoscenza del metodo di stesura e di redazione di un lavoro approfondito su un tema scientifico. Con questo compito siamo venuti a contatto con temi molto interessanti e attuali, che ripresi in un secondo momento con le conoscenze adeguate potrebbero diventare più intriganti e avvincenti. Siamo dispiaciuti dal fatto che non è presente all'interno del nostro lavoro una parte pratica che avrebbe reso ancora più interessante e concreto il nostro lavoro. Purtroppo i nostri limiti teorici, soprattutto matematici, ci hanno impedito di comprendere al meglio il problema. Le complicazioni non sono state poche e abbiamo incontrato molti ostacoli sul nostro cammino sia in ambito pratico che in ambito teorico, ma nonostante ciò pensiamo di aver concluso un buon lavoro che possa esporre il problema trattato in maniera semplice ma nel contempo completa.

Fisica dei plasmi<sup>1</sup>: [http://www.studentifisica.info/corso/file-quarto/Plasmi-Astrofisici/lez\\_plasma.pdf](http://www.studentifisica.info/corso/file-quarto/Plasmi-Astrofisici/lez_plasma.pdf)

Fluidodinamica<sup>2</sup>: <http://www.ramsete.com/DispenseFTII-02/campioli138708.pdf>

Dinamiche molecolari<sup>3</sup>:  
<http://www.chimica.unipd.it/sdsm/pubblica/download/brixen07/polimenoe00.pdf>

PM<sup>4</sup>: <http://homepage.univie.ac.at/franz.vesely/simsp/dx/node48.html>

PPPM<sup>5</sup>: <http://people.ee.duke.edu/~ayt/ewaldpaper/node15.html>

MLC<sup>6</sup>: <http://msp.berkeley.edu/camcos/2007/2-1/camcos-v2-n1-p03-p.pdf>

## 8. Bibliografia

Aarseth S. J. , 1963, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 126, 223

Aarseth S. J. , 1966, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 132, 35

Aarseth S. J. , 1969, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 144, 537

Aarseth S. J. , 1970, Astronomy and Astrophysics, 9, 64

Aarseth S. J. , 1972, Gravitational N-Body Problem, Proceedings of IAU Colloq. 10, held in Cambridge, England

Aarseth S. J. , 1975, Dynamics of Stellar Systems: Proceedings from IAU Symposium no. 69 held in Besancon, France

Aarseth S. J. , 1985, Dynamics of star clusters; Proceedings of the Symposium, Princeton, NJ

Aarseth S. J. , Gravitational N-Body Simulations Tools and Algorithms, Cambridge University Press, 2003

Aarseth S. J. , Henon M. , Wielen R. , 1974, Astronomy and Astrophysics, 37, 1

Aarseth S. J. , Hills J. G. , 1972, Astronomy and Astrophysics, 21, 255

Aarseth S. J. , Hoyle F. , 1964, Astrophisica Norvegica, 9, 313

Aarseth S. J. , Sverre J. , 1988, The few body problem; Proceedings of the 96th IAU Colloquium, Turku, Finland

Aarseth S. J. , Zare K. , 1974, Celestial Mechanics, 10, 185-205.

Ahmad A. , Cohen L. , 1973, Journal of Computational Physics, 12, 389 - 402

van Albada T. S. , 1968, Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 19, 479

Allen C. , Poveda A. , 1972, Gravitational N-Body Problem, Proceedings of IAU Colloq. 10, held in Cambridge, England

Barnes J. , Hut P. , 1986, Nature, 324, 446-449

Barnes J. , Treecode Guide, Institute for Astronomy of Hawaii

Boselli A. , Alla scoperta delle galassie, Springer, 2009

Bouvier P. , Janin G. , 1970, Astronomy and Astrophysics, 9, 461

Greengard L. , Rokhlin V. , 1987, Journal of Computational Physics, 73, 2

Hayli A. , 1967, Computer Simulation of Plasma and Many-body Problems; Symposium cosponsored by NASA Langley Research Center and the College of William and Mary, 19-21

Hayli A. , 1970, Astronomy and Astrophysics, 7, 249

Hayli A. , 1972, Bulletin of the Astronomical Society, 4, 420

Heggie D. C. , 1974, Celestial Mechanics, 10, 217-241

von Hoerner S. , 1960, Z. Astrophys. 50, 184-214

von Hoerner S. , 1963, Z. Astrophys. 57, 47-82

Jaswinder Pal Singh, John L. , Hennessy and Anoop Gupta, 1993, Journal Computer, 26, 3

King I. R. , 1966, Astronomical Journal, 71, 64

Kuijken K. , Dubinski J. , 1994, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 269, 13

Lin C. C. , Yuan C. , Shu F. H. , 1969, Astrophysical Journal, 155, 721

Mikkola S. , 1985, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 215, 171-177

Monaco, P. , Introduzione all'Astrofisica, Università di Trieste

Sparke L. S. e Gallagher J. S. , Galaxies in the Universe: An introduction, Cambridge University Press, 2007

Szebehely V. , Bettis D. G. , 1972, Gravitational N-Body Problem, Proceedings of IAU Colloq. 10, held in Cambridge, England

Szebehely V. , Peters C. F. , 1967, Astronomical Journal, 72, 876

Toomre A. , Toomre J. , 1971, Bulletin of the American Astronomical Society, 3, 390

Wielen R. , 1967, Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg, 19, 43

## Sitografia

<http://www.universetoday.com/30314/irregular-galaxy/>  
[http://www.scholarpedia.org/article/N-body\\_Simulations#Tree\\_codes](http://www.scholarpedia.org/article/N-body_Simulations#Tree_codes)  
<http://it.zettapedia.com/n-corpi-simulazione.htm>  
[http://www.windows2universe.org/the\\_universe/Irregulars.html](http://www.windows2universe.org/the_universe/Irregulars.html)  
<http://mindcine.com/toomre/>  
<http://www.pureinsight.org/node/5330>